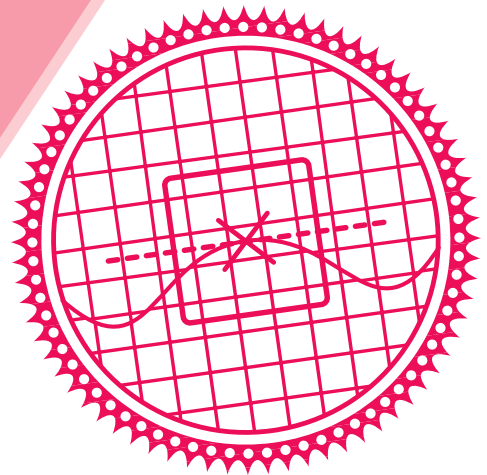


Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Derivaatta



Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut

Sanoma Pro Oy, Helsinki

puh. 020 391 000

sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta

ISBN 978-952-63-1996-4 Pitkä matematiikka 4

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2395-4

48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2396-1

Toimitus: Ville Sipiläinen, Riitta-Liisa Eerola

Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko, kansi: Timo Jokivartio

Taitto: Jukka Nieminen

Piirroksat: Marvegraf Oy/Marja Venäläinen

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla
(404/61).

Lukijalle

Pitkä Matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että opiskelija matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan hyödyntämään kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Opettajan materiaali

Kirjan opettajanmateriaali on Sanoma Pro Oppimisympäristössä. Materiaalissa muun muassa pohditaan opetusmenetelmiä ja selvennetään kirjan ja sen eri lukujen tavoitteita ja niiden ilmenemistä esimerkeissä ja tehtävissä. Lisäksi materiaali tarjoaa työskentelyn avuksi kalvopohjia ja testejä. Opettajan materiaali sisältää myös kaikkien tehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut.

Derivaatta

Kurssilla syvennetään tietoja funktioista oppimalla käsittelemään rationaalifunktioita ja tutustumalla funktion raja-arvoihin ja funktion jatkuvuuteen. Kurssin keskeinen käsite on funktion derivaatta. Derivaatan avulla tutkitaan muun muassa funktion arvojen kasvunopeutta ja funktion kasvamista ja vähenemistä. Opitaan myös määrittämään polynomi- ja rationaalifunktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja ja soveltamaan tätä taitoa monipuolisiin käytännön tilanteisiin.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 5.2.2006

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Rationaalifunktio.	2
Rationaalilausekkeen sieventäminen	2
Funktion raja-arvo.	2
Funktion jatkuvuus	2
Funktion kasvunopeus	1
Derivaatta raja-arvona.	2
Derivaattafunktio	1
Käyrän tangentti	2
Polynomifunktion kulku	2
Polynomifunktion suurin ja pienin arvo	2
Sovelluksia	2
Funktioiden tulon ja funktion potenssin derivaatta.	2
Funktioiden osamäärän derivaatta	2
Rationaaliyhtälö ja rationaalifunktion merkki	2
Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo – sovelluksia	2

Sisällys

Rationaalifunktio	7
Rationaalilausekkeen sieventäminen	15
Funktion raja-arvo	20
Funktion jatkuvuus	31
Funktion kasvunopeus	40
Derivaatta raja-arvona	49
Derivaattafunktio	58
Käyrän tangentti	66
Polynomifunktion kulku	73
Polynomifunktion suurin ja pienin arvo	87
Sovelluksia	99
Funktioiden tulon ja funktion potenssin derivaatta	111
Funktioiden osamäärän derivaatta	119
Rationaaliyhtälö ja rationaalifunktion merkki	130
Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo – sovelluksia	141
 Kertaus	 149
Kertaustehtäviä	169
Tehtäväsarjoja	174
Tehtävien vastaukset	177
Hakemisto	208

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

7. Derivaatta (MAA 7)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä
- omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta
- määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat
- osaa tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot
- osaa määrittää rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon sovellusongelmien yhteydessä.

Keskeiset sisällöt

- rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
- polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

Rationaalifunktio

Ongelma

Funktion g arvot lasketaan seuraavalla säännöllä:

Luku kerrotaan kolmella, tuloon lisätään luku 5 ja määritetään näin saadun luvun käänteisluku.

- Laske funktion g arvo $g(-1)$.
- Valitse muuttujaksi x ja muodosta funktion $g(x)$ lauseke. Laske lausekkeen avulla $g(-5)$.
- Mikä on funktion g määrittelyjoukko?

Funktion määritelmä

Funktio on sääntö, joka ilmaisee, kuinka jokaisesta funktion *määrittelyjoukon* luvusta saadaan toinen luku, *funktion arvo*. Säännön tulee olla sellainen, että se määrää funktion arvon yksikäsitteisesti.

Funktion f arvoa kohdassa a (pisteessä a) merkitään $f(a)$.

Funktion sääntö kuvataan usein laskulausekkeella, joka ilmaisee muuttujan avulla, kuinka funktion arvot lasketaan. Tällöin funktion arvo voidaan laskea sijoittamalla muuttujan arvo funktion lausekkeeseen.

Oletetaan, että funktiolla f on sääntö:

Luku kerrotaan kahdella ja tulosta vähennetään luku 6, minkä jälkeen näin saadulla erotuksella jaetaan alkuperäinen luku.

Jos muuttujaa merkitään x , funktiolle f saadaan lauseke

$$f(x) = \frac{x}{2x - 6}. \text{ Tällöin esimerkiksi } f(4) = \frac{4}{2 \cdot 4 - 6} = \frac{4}{2} = 2.$$

Funktion määrittelyjoukko

Jos funktio kuvaillaan suoraan laskusäännöllä rajaamatta etukäteen muuttujan arvoja, niin funktion määrittelyjoukko on suurin mahdollinen reaalilukujen joukko, jossa funktion arvo voidaan laskea.

Polynomifunktio

Funktio, jonka lauseke on polynomi, on *polynomifunktio*. Polynomifunktion asteluvun ilmaisee funktion lausekkeen korkeimman asteen termin eksponentti.

Esimerkiksi funktio $f(x) = -x^4 + 6x^3 - 2$ on neljännen asteen polynomifunktio. Vakiofunktio $g(x) = 7$ on nollannen asteen polynomifunktio.

Polynomifunktion määrittelyjoukko

Polynomifunktion arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan arvoilla, eli polynomifunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Murtolauseke ja rationaalifunktio

Murtolauseke on kahden saman muuttujan polynomin osamäärä.

Lausekkeet $\frac{3}{x}$ ja $\frac{3s}{s^2 - 6}$ ovat murtolausekkeita.

Rationaalifunktion lauseke on polynomien ja murtolausekkeiden summa.

Funktiot f , g ja h , joiden lausekkeet ovat

$$f(t) = 3t^7 - 9t + 1$$

$$g(s) = \frac{3s}{s^2 - 6}$$

$$h(x) = -5x + 1 - \frac{4}{3x + 6} + \frac{x^3}{x - 4},$$

ovat rationaalifunktioita. Erityisesti siis kaikki polynomifunktiot ovat myös rationaalifunktioita.

Rationaalifunktion määrittelyjoukko

Koska nollalla ei voi jakaa, rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisissa kohdissa, joissa jokin nimittäjä saa arvon nolla. Rationaalifunktio on määritelty kaikilla muilla muuttujan arvoilla.

Määrittelyjoukko sovellustilanteissa

Jos funktio ilmaisee suureiden välistä riippuvuutta, niin sovellustilanne määrää funktion määrittelyjoukon.

Oletetaan, että funktio $A(x)$ ilmaisee sellaisen neliön pinta-alan, jonka sivun pituus on x . Koska neliön sivun pituus on aina positiivinen luku, funktion A määrittelyjoukko on $]0, \infty[$. Funktiolla on lauseke $A(x) = x^2$. Määrittelyjoukkoa ei päätelty lausekkeesta vaan sovellustilanteesta.

ESIMERKKI 1

Mikä on funktion $h(x) = -5x + 1 - \frac{4}{3x+6} + \frac{x^3}{x-4}$ määrittelyjoukko?

Ratkaisu

Funktio $h(x) = -5x + 1 - \frac{4}{3x+6} + \frac{x^3}{x-4}$ ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa. Funktio on määritelty kaikilla muilla muuttujan arvoilla.

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$3x + 6 = 0$$

$$x = -2$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko, josta on poistettu luvut -2 ja 4 , eli joukko $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$.

Määrittelyjoukko voidaan myös kuvata antamalla funktion *määrittelyehto*: $x \neq -2$ ja $x \neq 4$.

Vastaus

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\} \quad (x \neq -2 \text{ ja } x \neq 4)$$

ESIMERKKI 2

Yksinkertaista funktion $f(x) = \frac{5(x-3)}{(x+1)(x-3)}$ lauseke supistamalla.

Onko supistetun lausekkeen määrittelemällä funktiolla $g(x)$ sama määrittelyjoukko kuin funktiolla $f(x)$?

Ratkaisu

Murtolauseke voidaan supistaa osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä.

$$\frac{5\cancel{(x-3)}}{(x+1)\cancel{(x-3)}} = \frac{5}{x+1}$$

Funktion $f(x) = \frac{5(x-3)}{(x+1)(x-3)}$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

(eli $x \neq -1$ ja $x \neq 3$).

Funktion $g(x) = \frac{5}{x+1}$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (eli $x \neq -1$).

Siis funktion $g(x)$ määrittelyjoukko ei ole sama kuin funktion $f(x)$.

Vastaus

$$\frac{5(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{5}{x+1}. \text{ Määrittelyjoukko ei ole sama.}$$

Murtolausekkeen supistaminen

Murtolauseke voidaan kuten murtoluku supistaa osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä. Yhteiset tekijät nähdään, kun osoittaja ja nimittäjä saatetaan tulon muotoon.

ESIMERKKI 3

Supista murtolauseke.

$$\text{a) } \frac{10x + 15}{20x} \quad \text{b) } \frac{3x^2 - x}{2x} \quad \text{c) } \frac{8x + 4}{6x + 3} \quad \text{d) } \frac{3 - x}{x - 3}$$

Ratkaisu

$$\text{a) } \frac{10x + 15}{20x}$$

Osoittaja saatetaan tulon muotoon erottamalla termien yhteinen tekijä 5. Nimittäjä on jo tulo.

$$\begin{aligned} &= \frac{\overset{1}{\cancel{5}}(2x + 3)}{\cancel{20}x} \\ &= \frac{2x + 3}{4x} \end{aligned}$$

Luku 5 on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

$$\text{b) } \frac{3x^2 - x}{2x}$$

Osoittajan termeillä on yhteinen tekijä x .

$$\begin{aligned} &= \frac{\overset{1}{\cancel{x}}(3x - 1)}{\cancel{2}x} \\ &= \frac{3x - 1}{2} \end{aligned}$$

Monomi x on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

$$\text{c) } \frac{8x + 4}{6x + 3}$$

Osoittajan termeillä on yhteinen tekijä 4.

Nimittäjän termeillä on yhteinen tekijä 3.

$$\begin{aligned} &= \frac{\overset{1}{\cancel{4}}(\cancel{2}x + \cancel{1})}{\cancel{3}(\cancel{2}x + \cancel{1})} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Binomi $2x + 1$ on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

d) Polynomi $3 - x$ on polynomin $x - 3$ vastapolynomi:
 $3 - x = -x + 3 = -1 \cdot (x - 3)$.

$$\frac{3-x}{x-3} = \frac{-1 \cdot \cancel{(x-3)}}{1 \cdot \cancel{(x-3)}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Binomi $x - 3$ on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

Vastaus

a) $\frac{2x+3}{4x}$ b) $\frac{3x-1}{2}$ c) $\frac{4}{3}$ d) -1

ESIMERKKI 4

Supista lauseke $\frac{x^2 - 9}{4x - 12}$.

Ratkaisu

Lausekkeen osoittaja $x^2 - 9$ on monomien x ja 3 neliöiden erotus. Osoittaja on siis muistikaavan $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ mukaisesti monomien x ja 3 summan ja erotuksen tulo.

$$\frac{x^2 - 9}{4x - 12}$$

Osoittajassa on $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Nimittäjän termeillä on yhteinen tekijä 4 .

$$= \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{4\cancel{(x-3)}} = \frac{x+3}{4}$$

Vastaus

$$\frac{x+3}{4}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

1. Funktion f arvo lasketaan

- a) lisäämällä luvun kuutioon luku 3 ja korottamalla summa potenssiin kaksi
 b) lisäämällä lukuun luku 2 ja jakamalla summalla luku 5.

Merkitse muuttujaa jollain kirjaimella ja muodosta funktion lauseke. Onko funktio f polynomifunktio? Jos f on polynomifunktio, niin mikä on funktion f asteluku? Onko funktio f rationaalifunktio? Mikä on funktion f määrittelyjoukko?

2. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $-x^3 + 7x - 1$
 b) $\frac{x}{x+3}$
 c) $\frac{x}{x+3} - \frac{2x-8}{4x+1}$

3. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $\frac{3x}{x^2-9}$
 b) $\frac{3x}{x^2-9x}$
 c) $\frac{3x}{x^2+9}$

4. Mikä on funktion $f(x) = \frac{5x^2-10x}{x-2}$ määrittelyjoukko? Supista funktion lauseke. Mikä on supistamalla saadun lausekkeen määrittelemän funktion $g(x)$ määrittelyjoukko?

Supista tehtävien 5–11 murtolausekkeet, jos supistaminen on mahdollista.*

5. a) $\frac{5x^2}{15x}$ b) $\frac{x^2}{4x^3}$ c) $\frac{t}{9t}$

6. a) $\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4}$ b) $\frac{3+5}{3 \cdot 4}$
 c) $\frac{5(x+2)}{10x}$ d) $\frac{5x+2}{10x}$

7. a) $\frac{3x+12}{6x}$ b) $\frac{t}{t^2+t}$ c) $\frac{4t-t^2}{6t}$

8. a) $\frac{t+5}{3t+15}$ b) $\frac{x+1}{x^2+x}$ c) $\frac{7x-21}{(x-3)^2}$

9. a) $\frac{x-1}{1-x}$ b) $\frac{x+1}{1+x}$
 c) $\frac{3x-x^2}{x-3}$ d) $\frac{x-3}{x+3}$

10. a) $\frac{t^2-4}{t+2}$ b) $\frac{2t-4}{t^2-4}$ c) $\frac{t-1}{4t^2-4}$

11. a) $\frac{1-t}{(t-1)^2}$ b) $\frac{t^2-1}{(t+1)^2}$
 c) $\frac{t^2+1}{(t+1)^2}$ d) $\frac{t^2+t}{(t+1)^2}$

12. Jaa toisen asteen polynomit tekijöihin ja supista.

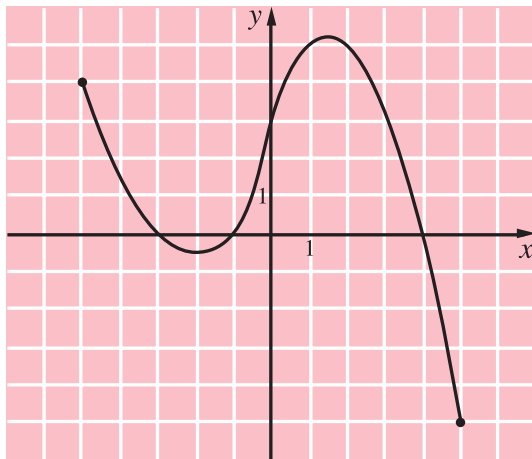
a) $\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ b) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

* Supistamisen voi tarkistaa piirtämällä graafisella laskimella alkuperäisen ja supistetun lausekkeen kuvaajat. Kuvaajien tulee piirtyä päällekkäin.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

13. Kuviossa on erään funktion f kuvaaja välillä $[-5, 5]$.

- a) Mitkä ovat funktion f arvot $f(-4)$ ja $f(0)$?
 b) Missä välin $[-5, 5]$ pisteissä funktion f arvo on 5?
 c) Mitkä ovat funktion f välillä $[-5, 5]$ olevat nollakohdat?
 d) Millä välin $[-5, 5]$ osaväleillä funktion f arvot ovat negatiivisia?



14. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $\frac{4x+7}{(x+5)^2}$ b) $\frac{4x+7}{x^2+25}$
 c) $\frac{4x+7}{x^3+25x^2}$ d) $17x - \frac{x+3}{6x} - \frac{x-3}{x^2-25}$

15. a) Funktio $\frac{2x}{x-3}$ ei ole määritelty muuttu-

jan arvolla $x = 3$. Tutki, kuinka tämä ilmenee graafisella laskimella piirretyssä funktion kuvaajassa. Supistuuko funktion lauseke?

b) Funktio $\frac{x^2-3x}{x-3}$ ei myöskään ole määritelty, kun $x = 3$. Kuinka tämä ilmenee funktion kuvaajassa? Supistuuko funktion lauseke? Vertaa a-kohdan tilanteeseen.

Supista tehtävien 16–21 murtolausekkeet, jos supistaminen on mahdollista.

16. a) $\frac{3 \cdot 5 - 1}{30}$ b) $\frac{3(x+1) - 9}{(x+1)(x-2)}$

17. a) $\frac{t^2 - 5t}{10t}$ b) $\frac{4t^2 - 8}{4t}$

c) $\frac{x^2}{x^3 + 10x^2}$

18. a) $\frac{5t+10}{4t+8}$ b) $\frac{6t+10}{3t+8}$

c) $\frac{5x+10}{3x^2+6x}$

19. a) $\frac{x^2-x}{x^2-1}$ b) $\frac{1-x^2}{(x-1)^2}$

c) $\frac{4x^2-4}{3x^2+3x}$

20. a) $\frac{x^2+1}{x^3+x}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2}$

c) $\frac{x^3-9x}{3x^3-9x^2}$

21. a) $\frac{2t^2+4t}{t^3+4t}$ b) $\frac{2t^2-4t}{t^3-4t}$

c) $\frac{t^2-2t}{2t^3-4t^2}$ d) $\frac{4-2t}{t^3-4t}$

22. Supista murtolauseke $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}$.

23. Määritä vakiolle c sellainen arvo, että lauseke $\frac{3x^2+x+c}{x+5}$ voidaan supistaa. Mikä lausekkeen supistettu muoto tällöin on?

Rationaalilausekkeen sieventäminen

Ongelma

Laske. a) $-\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$ b) $-\frac{3}{2x^2} + \frac{5}{x^3}$
 c) $(2 - \frac{10}{7}) : \frac{4}{3}$ d) $(2 - \frac{10}{x}) : \frac{x-5}{x}$

Murtolausekkeiden laskutoimitukset

Murtolausekkeiden summa, erotus, tulo ja osamäärä voidaan aina saattaa murtolausekkeeksi eli muotoon $\frac{\text{polynomi}}{\text{polynomi}}$. Tällöin noudatetaan sääntöjä laskusääntöjä kuin murtoluvuilla laskettaessa.

ESIMERKKI 1

Saata murtolausekkeen muotoon.

a) $\frac{x+1}{x} + \frac{3x}{x+1}$ b) $\frac{x-5}{2x} - \frac{1-3x}{6x}$

Ratkaisu

a) $\frac{\overset{x+1}{\cancel{x+1}}}{x} + \frac{\overset{x}{\cancel{x+1}}}{\cancel{x+1}}$

Lavennetaan samannimisiksi.

$$= \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} + \frac{3x^2}{x(x+1)}$$

Osoittajaksi tulee osoittajien summa.

$$= \frac{(x+1)^2 + 3x^2}{x(x+1)}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + 3x^2}{x(x+1)}$$

Sievennetään osoittaja.

$$= \frac{4x^2 + 2x + 1}{x(x+1)}$$

Nimittäjä jätetään tulon muotoon, jolloin määrittelyjoukko ja mahdolliset supistukset ovat paremmin nähtävillä.

b) $\frac{x-5}{2x} - \frac{1-3x}{6x}$ Lavennetaan samannimisiksi.

$= \frac{3(x-5)}{6x} - \frac{1-3x}{6x}$ Osoittajaksi tulee osoittajien erotus.

$= \frac{3(x-5) - (1-3x)}{6x}$ Erotus merkitään käyttämällä sulkeita.

$= \frac{3x - 15 - 1 + 3x}{6x}$ Sievennetään osoittaja.

$= \frac{6x - 16}{6x}$ Supistuu.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(3x-8)}{\underset{3}{\cancel{6x}}} = \frac{3x-8}{3x}$

Vastaus

a) $\frac{4x^2 + 2x + 1}{x(x+1)}$ b) $\frac{3x-8}{3x}$

ESIMERKKI 2

Laske lausekkeiden $\frac{x^2+x}{x-1}$ ja $\frac{x}{x+1}$ a) tulo b) osamäärä.

Ratkaisu

a) $\frac{x^2+x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}$ Osoittajaksi tulee osoittajien tulo ja nimittäjäksi nimittäjien tulo.

$= \frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{(x+1)}} \cdot x}{(x-1) \underset{1}{\cancel{(x+1)}}$ Osoittaja jakautuu vielä tekijöihin. Voidaan supistaa.

$= \frac{x^2}{x-1}$

$$\text{b) } \frac{x^2 + x}{x - 1} : \frac{x}{x + 1}$$

Jakolasku muutetaan kertolaskuksi.

Jaettava kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

$$= \frac{x^2 + x}{x - 1} \cdot \frac{x + 1}{x} = \frac{\cancel{x}(x + 1)(x + 1)}{(x - 1)\cancel{x}}$$

$$= \frac{(x + 1)^2}{x - 1}$$

Vastaus

$$\text{a) } \frac{x^2}{x - 1} \quad \text{b) } \frac{(x + 1)^2}{x - 1}$$

ESIMERKKI 3

Laske $(\frac{9}{x} - x) : (x - 3)$.

Ratkaisu

$$(\frac{9}{x} - x) : (x - 3)$$

Sievennetään ensin erotus $\frac{9}{x} - x$.

$$= (\frac{9}{x} - \frac{x^2}{x}) : (x - 3)$$

$$= \frac{9 - x^2}{x} : (x - 3)$$

Jaettava kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

$$= \frac{9 - x^2}{x} \cdot \frac{1}{x - 3}$$

$$= \frac{9 - x^2}{x(x - 3)}$$

Osoittaja on summan ja erotuksen tulo.

$$= \frac{(3 + x)(3 - x)}{x(x - 3)}$$

Lauseke supistuu.

$$= -\frac{x + 3}{x}$$

Vastaus

$$-\frac{x + 3}{x}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**24.** Laske.

$$\text{a) } \frac{5}{6} + \frac{5}{12} \quad \text{b) } -\frac{5}{8} + \frac{1}{6} \quad \text{c) } 3 - \frac{19}{7}$$

Saata murtolausekkeen muotoon.

25. a) $\frac{5}{6x} + \frac{7}{3x}$

b) $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2}$

c) $-\frac{2}{5x} + 3$

26. a) $\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}$

b) $x - \frac{3}{x}$

c) $x - \frac{5+x^2}{x}$

27. a) $\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x^2}$

b) $\frac{3}{2x} + \frac{x+6}{x^2}$

c) $-\frac{1}{x-1} - 1$

28. a) $\frac{t}{t-2} - \frac{3}{t+3}$

b) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+4}{2x-4}$

29. Laske.

a) $3 \cdot \frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$

c) $\frac{3}{10} : \frac{5}{6}$

d) $(1 - \frac{1}{4}) : 6$

30. Laske lausekkeiden tulo ja osamäärä.

a) x^2 ja $\frac{x+1}{3x}$

b) $\frac{x}{x-1}$ ja $\frac{x+1}{3x}$

c) $\frac{1}{x^2-x}$ ja $\frac{x-1}{x}$

31. Laske.

a) $\frac{1}{x-1} \cdot (\frac{1}{x} - 1)$

b) $\frac{x+1}{2} : (1 + \frac{1}{x})$

c) $(x - \frac{1}{x}) : (x+1)$

32. Laske. Jaa nimittäjät ensin tekijöihin, jotta löydät yksinkertaisen lavennuksen.

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2-x}$

b) $\frac{s}{s-1} - \frac{2s}{s^2-1}$

c) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}$

33. Laske.

a) $(\frac{1}{x-3} - 1) : (x-4)$

b) $(\frac{18}{x^2} - 2) : (x-3)$

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

Saata murtolausekkeen muotoon.

34. a) $\frac{4}{x} - \frac{2-x}{x^2}$

b) $\frac{x-3}{(x+3)^2} + \frac{9}{x+3}$

35. a) $\frac{3x}{x-2} + \frac{1}{2-x}$

b) $x - \frac{x-2}{x+1}$

c) $x - 2 + \frac{1}{x-3}$

36. a) $-\frac{1}{2x} + \frac{x}{2x^2-3}$

b) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{4}{x+2}$

37. Laske funktion $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x^2}{x-1}$ arvo $f(-\frac{9}{13})$.

38. Laske lausekkeiden $\frac{x^2+x}{x-1}$ ja $\frac{x}{x^2-1}$ tulo ja osamäärä.

39. Laske.

a) $\frac{1}{x-1} \cdot (x - \frac{1}{x})$

b) $\frac{1}{x+1} \cdot (x + \frac{1}{x})$

c) $(1 - \frac{1}{x}) : (1 - x)$

d) $(x - \frac{1}{x}) : (1 - \frac{1}{x})$

40. a) $1 - \frac{t}{1+t} + \frac{1}{t^2+t}$

b) $\frac{2}{s-2} - \frac{s}{s^2-4}$

c) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1}$

41. a) $(\frac{x^2-1}{x^2-3} - 3) : (x+2)$

b) $(4 - \frac{x^2}{x-1}) : (x-2)$

42. a) $\frac{x}{1 - \frac{1}{1-x}}$

b) $\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}$

43. Saata murtolausekkeeksi.

a) $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) : (a+b)$

b) $(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}) : (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

44. Lukujen a ja b summa on 18 ja tulo -6 .
Laske

a) lukujen a ja b käänteislukujen summa

b) lukujen a ja b neliöiden käänteislukujen summa.

Funktion raja-arvo

Ongelma

Funktiot $f(x) = \frac{3x^2 - 12}{5x - 10}$ ja $g(x) = \frac{4x^2 - 12}{3x - 6}$ eivät ole määritellyt kohdassa 2. Piirrä funktioiden f ja g kuvaajat graafisella laskimella. Päätele kuvaajasta, mitä lukua funktioiden f ja g arvot lähenevät, kun muuttujan arvot lähenevät lukua 2.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Funktio $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ei ole määritelty kohdassa 3. Tutki funktion f arvoja, kun muuttujan arvot lähenevät lukua 3.

Ratkaisu

Lasketaan funktion f arvoja, kun muuttujan arvot lähenevät lukua 3.*

Lähestytään lukua 3 vasemmalta:

x	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
2,5	5,5
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999

Lähestytään lukua 3 oikealta:

x	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
3,5	6,5
3,1	6,1
3,01	6,01
3,001	6,001

* Funktio f kannattaa näppäillä graafisen laskimen grafiikkafunktioksi (piirrettäväksi funktioksi), jolloin funktion arvoja eri kohdissa voi laskea nopeasti laskimen arvojenlaskemistoiminnolla.

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähenevät lukua 3 kummalta puolelta tahansa, niin funktion f arvot lähenevät lukua 6. Varmuudella tämä nähdään seuraavasti:

Lauseke $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ supistuu:

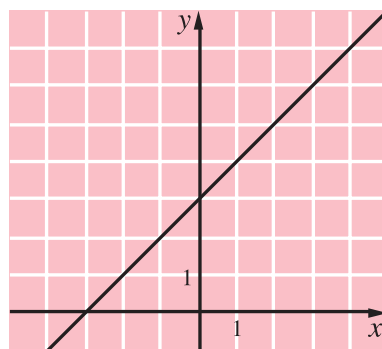
$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Muistikaava $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

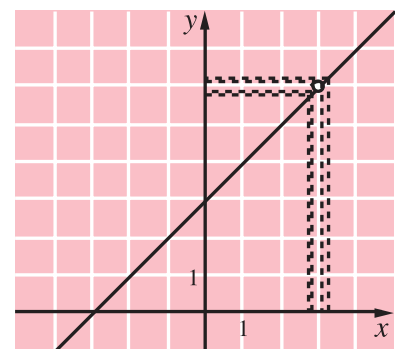
$$= \frac{(x + 3)(\cancel{x - 3})}{\cancel{x - 3}} = x + 3$$

Kun muuttujan x arvo on eri suuri kuin 3, niin funktioiden $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ja $x + 3$ arvot ovat yhtä suuret. Kun muuttujan arvot lähenevät lukua 3, funktioiden arvot lähenevät siis samaa lukua.

Kun muuttujan x arvot lähenevät lukua 3, funktion $x + 3$ arvot lähenevät lukua $3 + 3 = 6$. Siis myös funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ arvot lähenevät lukua 6.



Funktion $x + 3$ kuvaaja on suora $y = x + 3$.



Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ kuvaaja on suora $y = x + 3$, josta on poistettu piste $(3, 6)$. Kun muuttujan x arvot lähenevät lukua 3, funktion f arvot lähenevät lukua 6.

Vastaus

Arvot lähenevät lukua 6.

Funktion raja-arvo

Oletetaan, että funktio f on määritelty kohdan a läheisyydessä kohdan a molemmilla puolilla.*

Funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b , jos muuttujan arvojen lähestyessä lukua a kummalta puolelta tahansa, funktion f arvot lähestyvät lukua b . Lähestymisen tulee olla sellaista, että tulemalla tarpeeksi lähelle lukua a funktion f arvot saadaan niin lähelle lukua b kuin suinkin halutaan.

Jos funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b , niin merkitään**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Voidaan myös merkitä:

$$f(x) \rightarrow b, \text{ kun } x \rightarrow a.$$

Johdantoesimerkissä 1 nähtiin, että $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$
 eli $\frac{x^2 - 9}{x - 3} \rightarrow 6$, kun $x \rightarrow 3$.

Polynomi- ja rationaalifunktion raja-arvo kohdassa, jossa funktio on määritelty

Jos funktio f on polynomifunktio tai rationaalifunktio, joka on määritelty kohdassa a , niin funktion f raja-arvo kohdassa a on sama kuin funktion arvo kohdassa a eli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{5x}{4x + 2}$ on määritelty kohdassa 3 , joten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x}{4x + 2} && \text{Sijoitetaan } x = 3. \\ &= \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3 + 2} = \frac{15}{14}. \end{aligned}$$

* Raja-arvon määritelmässä ei ole merkitystä sillä, onko funktio f määritelty kohdassa a vai ei.

**Lyhenne $\lim$ tulee latinan kielen sanasta *limes*, joka tarkoittaa rajaa.

Rationaalifunktion raja-arvon määrittäminen

Jos tehtävänä on määrittää rationaalifunktion raja-arvo sellaisessa kohdassa a , jossa funktio ei ole määritelty, niin funktion lauseke pyritään supistamaan muotoon, joka on määritelty kohdassa a .

Johdantoesimerkissä 1 funktion $\frac{x^2-9}{x-3}$ lauseke supistui muotoon $x+3$. Tällöin voitiin päätellä:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6.$$

ESIMERKKI 2

Määritä $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2-75}{x+5}$.

Ratkaisu

Jos funktion $\frac{3x^2-75}{x+5}$ lausekkeeseen sijoitetaan $x = -5$, nimittäjän arvoksi tulee nolla. Raja-arvoa ei saada suoraan sijoittamalla. Pyritään saamaan lauseke sellaiseen supistettuun muotoon, johon voidaan sijoittaa $x = -5$.

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2-75}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3(x^2-25)}{x+5} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3 \overset{1}{\cancel{(x+5)}} (x-5)}{\underset{1}{\cancel{x+5}}} \quad \text{Supistetaan.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -5} 3(x-5) \quad \text{Funktio } 3(x-5) \text{ on määritelty kohdassa } -5, \text{ joten raja-arvo saadaan sijoittamalla } x = -5.$$

$$= 3(-5-5) = -30$$

Ratkaisu voidaan myös merkitä:

$$\frac{3x^2-75}{x+5} = \frac{3(x^2-25)}{x+5} = \frac{3 \overset{1}{\cancel{(x+5)}} (x-5)}{\underset{1}{\cancel{x+5}}}$$

$$= 3(x-5) \rightarrow 3(-5-5) = -30, \text{ kun } x \rightarrow -5$$

Vastaus

-30

ESIMERKKI 3

Määritä funktion $\frac{6x}{x^2 - 3x}$ raja-arvo kohdassa 0.

Ratkaisu

Jos funktion $\frac{6x}{x^2 - 3x}$ lausekkeeseen sijoitetaan $x = 0$, nimittäjän arvoksi tulee nolla. Raja-arvoa ei saada suoraan sijoittamalla. Pyritään saamaan lauseke sellaiseen supistettuun muotoon, johon voidaan sijoittaa $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{1}{\cancel{6x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x - 3}$$

Raja-arvo saadaan sijoittamalla $x = 0$.

$$= \frac{6}{0 - 3} = -2$$

Voidaan myös merkitä:

$$\frac{6x}{x^2 - 3x} = \frac{\overset{1}{\cancel{6x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}(x - 3)} = \frac{6}{x - 3} \rightarrow \frac{6}{0 - 3} = -2, \text{ kun } x \rightarrow 0$$

Vastaus

-2

ESIMERKKI 4

Määritä funktion $(\frac{1}{x^2} - 1) : (x - 1)$ raja-arvo kohdassa 1.

Ratkaisu

Suoritetaan ensin merkitty vähennyslasku ja sen jälkeen jakolasku.

$$(\frac{1}{x^2} - 1) : (x - 1)$$

Lavennetaan samannimisiksi.

$$= (\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}) : (x - 1)$$

$$= \frac{1 - x^2}{x^2} : (x - 1)$$

Kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

$$= \frac{1 - x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{x - 1}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= \frac{(1 + x)(1 - x)}{x^2} \cdot \frac{1}{x - 1}$$

Supistetaan.

$$= -\frac{1 + x}{x^2}$$

Raja-arvo saadaan sijoittamalla $x = 1$.

$$\rightarrow -\frac{1 + 1}{1^2} = -2, \text{ kun } x \rightarrow 1$$

Vastaus

-2

JOHDANTOESIMERKKI 5

Tutki funktion $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ raja-arvoa kohdassa 1.

Ratkaisu

Jos funktion $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ lausekkeeseen sijoitetaan luku 1, nimittäjän arvoksi tulee nolla. Funktion f raja-arvoa kohdassa 1 ei siis saada suoraan sijoittamalla.

Funktion lauseke ei myöskään supistu.

Lasketaan funktion arvoja, kun muuttujan arvot lähenevät lukua 1.

Lähestytään lukua 1 vasemmalta.

x	$f(x) = \frac{3x}{x-1}$
0,5	$\frac{1,5}{-0,5} = -3$
0,9	$\frac{2,7}{-0,1} = -27$
0,99	$\frac{2,97}{-0,01} = -297$

Funktion arvot pienenevät lähestymättä mitään lukua. Tämä johtuu siitä, että osoittajan arvot lähenevät lukua 3 ja nimittäjät arvot lähenevät nollaa ja ovat negatiivisia.

Lähestytään lukua 1 oikealta.

x	$f(x) = \frac{3x}{x-1}$
1,5	$\frac{4,5}{0,5} = 9$
1,1	$\frac{3,3}{0,1} = 33$
1,01	$\frac{3,03}{0,01} = 303$

Funktion arvot suurenevat lähestymättä mitään lukua. Tämä johtuu siitä, että osoittajan arvot lähenevät lukua 3 ja nimittäjän arvot lähenevät nollaa ja ovat positiivisia.

Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

Vastaus

Ei raja-arvoa.*

Rationaalifunktion raja-arvon olemassaolo kohdassa, jossa nimittäjän arvo on nolla

Oletetaan, että rationaalifunktio $R(x)$ on muotoa $R(x) = \frac{P(x)}{S(x)}$, missä $P(x)$ ja $S(x)$ ovat polynomifunktioita.

Oletetaan, että nimittäjän $S(x)$ arvo kohdassa a on nolla eli $S(a) = 0$.

Tällöin:

Jos osoittajana olevan polynomin $P(x)$ arvo kohdassa a on eri suuri kuin 0 eli $P(a) \neq 0$, niin funktiolla $R(x)$ ei ole raja-arvoa kohdassa a .

Siis välttämätön ehto raja-arvon olemassaololle on, että myös $P(a) = 0$ eli funktio $R(x)$ on kohdassa a ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”.

Ehto on välttämätön, mutta ei riittävä. Rationaalifunktiolla, joka on kohdassa a ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”, ei aina ole raja-arvoa kohdassa a (tehtävä 49).

* Tulos ilmenee myös graafisella laskimella piirretystä funktion f kuvaajasta.

ESIMERKKI 6

Määritä $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

Ratkaisu

Kohdassa 3 nimittäjän $x - 3$ arvo on 0 ja osoittajan $x^2 - 5$ arvo $3^2 - 5 = 4$. Funktio $\frac{x^2 - 5}{x - 3}$ ei ole kohdassa 3 ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”.

Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 3.

Vastaus

Ei raja-arvoa.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

45. Määritä funktion raja-arvo kohdassa 5. Tutki ensin, saako raja-arvon suoraan sijoittamalla.

a) $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ b) $\frac{x^2 - 3}{x - 3}$ c) $\frac{3x - 15}{2x - 10}$

46. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x}{2x}$ b) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{5s^2 - s}$

47. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{3x^2 - 12}$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 12}{x^2 - 16}$

48. Määritä funktion raja-arvo kohdassa 1.

a) $\frac{1}{x-1} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ b) $\left(\frac{1}{x} - 1\right) : (x - 1)$

49. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x - 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{x^2 + x}$

50. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$

51. Määritä

a) funktion $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}\right) : (x - 3)$ raja-arvo kohdassa 3

b) funktion $\left(\frac{1}{x^2} - 9\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$ raja-arvo kohdassa $\frac{1}{3}$.

52. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x - 3}$

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

53. Mikä on funktion raja-arvo kohdassa 4?

a) $f(x) = \frac{6}{7 - x}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

54. Määritä

a) funktion $f(t) = \frac{t^2 - 9}{3t - 9}$ raja-arvo kohdassa 3

b) funktion $g(x) = \frac{12x}{3x^2 - 4x}$ raja-arvo kohdassa 0

c) funktion $h(x) = \frac{5x^2 - 15x}{x - 3}$ raja-arvo kohdassa 3.

55. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{16x^2 - 1}{4x + 1}$

56. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) : (x - 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 1} - 1\right) \frac{1}{x - 2}$

57. Määritä funktion raja-arvo kohdassa 3.

a) $f(x) = \frac{x-6}{x-3}$ b) $g(x) = \frac{x^2-3x}{4x-12}$

c) $h(x) = \frac{x^2-3x}{(x-3)^2}$

58. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8-1}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{16}-1}{x-1}$

59. Määritä vakio a niin, että funktiolla

$f(x) = \frac{3x^2+a}{x-5}$ on raja-arvo kohdassa 5. Mikä

funktion raja-arvo kohdassa 5 tällöin on?

60. Määritä funktion

$f(x) = \left(\frac{x^2}{x+1} + 4\right) : (x+2)$

raja-arvo kohdassa -2.

61. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-2x-15}{x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^2+x-1}{3x-1}$

62. Määritä vakio a niin, että funktiolla

$f(x) = \frac{x^2+ax+5}{x+1}$ on raja-arvo kohdassa -1.

Mikä funktion f raja-arvo kohdassa -1 tällöin on?

63. Olkoon $f(x) = x^2 + 4$. Määritä.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)^2-f(1)^2}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)^4-f(1)^4}{x-1}$

Funktion jatkuvuus

Edellisessä luvussa käytettiin hyväksi polynomifunktioiden ja rationaalifunktioiden ominaisuutta:

Funktion raja-arvo määrittelyjoukon jokaisessa kohdassa a on sama kuin funktion arvo kohdassa a .

Ominaisuutta kutsutaan funktion jatkuvuudeksi.

Funktion jatkuvuus

Olkoon a jokin luku funktion f on määrittelyjoukossa. Funktio f on *jatkuva kohdassa a* , jos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Polynomi- ja rationaalifunktioiden jatkuvuus

Polynomifunktio on määritelty koko reaalilukujen joukossa ja se on jatkuva joka kohdassa, eli:

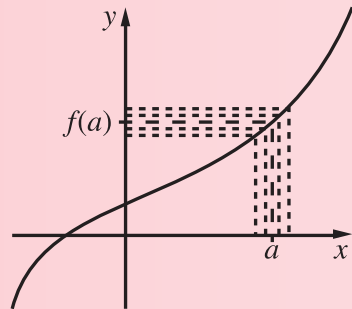
Polynomifunktio on kaikkialla jatkuva.

Rationaalifunktio ei ole välttämättä määritelty koko reaalilukujen joukossa. Rationaalifunktio on jatkuva jokaisessa kohdassa, jossa se on määritelty, eli:

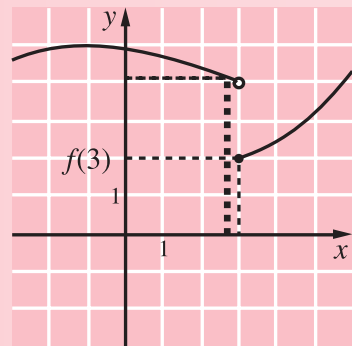
Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Jatkuvuus ja funktion kuvaaja

Jos funktio on jatkuva jollakin lukusuoran välillä, niin funktion kuvaaja tällä välillä on katkeamaton käyrä.



Kuviossa on jatkuvan funktion f kuvaaja. Kun muuttujan arvot lähestyvät lukua a kummalta puolelta tahansa, funktion f arvot lähenevät lukua $f(a)$ eli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



Kuvion funktio f ei ole jatkuva kohdassa 3. Funktion arvo kohdassa 3 on 2 eli $f(3) = 2$ (umpinainen ympyrä). Kun muuttujan arvot lähenevät lukua 3 vasemmalta, funktion arvot eivät lähene lukua $f(3)$. Siis luku $f(3)$ ei ole funktion raja-arvo kohdassa 3.*

ESIMERKKI 1

- Osoita, että yhtälöllä $x^5 + 80 = 15x^3$ on ainakin yksi juuri välillä $]3, 4[$.
- Voidaan osoittaa **, että yhtälöllä $x^5 + 80 = 15x^3$ on vain yksi juuri välillä $]3, 4[$. Määritä juuren likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu

- Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 + 80 = 15x^3$$

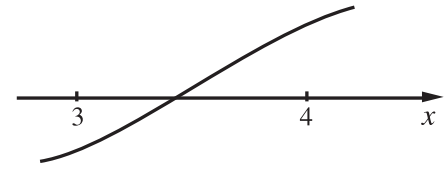
$$x^5 - 15x^3 + 80 = 0$$

* Epäjatkuviin funktioihin perehdytään tarkemmin syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

** Menetelmä, jolla tämä voidaan osoittaa, opitaan myöhemmin tässä kurssissa.

Yhtälön $x^5 + 80 = 15x^3$ juuret ovat funktion $f(x) = x^5 - 15x^3 + 80$ nollakohtia. Osoitetaan, että funktiolla f on nollakohta välillä $]3, 4[$.

Funktio f on määritelty ja jatkuva koko välillä $[3, 4]$, joten funktion f kuvaaja tällä välillä on katkeamaton käyrä. Jos funktion f arvot välin päätepisteissä 3 ja 4 ovat erimerkkiset, niin kuvaaja leikkaa x -akselin ainakin kerran kohtien 3 ja 4 välissä, eli funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]3, 4[$.



Lasketaan funktion $f(x) = x^5 - 15x^3 + 80$ arvot $f(3)$ ja $f(4)$.

$$f(3) = -82 < 0$$

$$f(4) = 144 > 0$$

Koska arvot $f(3)$ ja $f(4)$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]3, 4[$.^{*} Siis yhtälöllä $x^5 + 80 = 15x^3$ on ainakin yksi juuri välillä $]3, 4[$. $\square$

b) Lyhennetään väliä, jolla funktio $f(x) = x^5 - 15x^3 + 80$ vaihtaa merkkiään, kunnes pystytään päättämään nollakohdan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$$f(3,5) \approx -38 < 0 \quad \text{Juuri on välillä }]3,5; 4[.$$

$$f(3,6) \approx -15 < 0 \quad \text{Juuri on välillä }]3,6; 4[.$$

$$f(3,7) \approx 14 > 0 \quad \text{Juuri on välillä }]3,6; 3,7[.$$

$$f(3,65) \approx -1,6 < 0$$

Juuri on välillä $]3,65; 3,7[$, joten sen yksidesimaalinen likiarvo on 3,7.

Menetelmää, jolla juuren likiarvo löydettiin, kutsutaan *haarukoinniksi*.

Vastaus

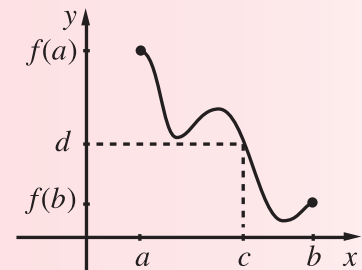
b) 3,7

^{*} Nollakohdan olemassaolo on suoraan nähtävissä graafisella laskimella piirretystä kuvaajasta. Nollakohdan olemassaolo on kuitenkin perusteltava laskemalla funktion arvoja.

Jatkuvan funktion arvot

Jos funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$, niin se saa välillä $]a, b[$ ainakin kerran jokaisen arvon, joka on päätepistearvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä.

Kuvion funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$. Jos d on mikä tahansa luku lukujen $f(b)$ ja $f(a)$ välistä, niin välillä $]a, b[$ on ainakin yksi sellainen muuttujan arvo c , että $f(c) = d$.



Erityisesti siis pätee:

Jatkuvan funktion nollakohdat

Jos funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$ ja jos funktion arvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla f on (ainakin yksi) nollakohta välillä $]a, b[$.



ESIMERKKI 2

Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 2x - 9 = 0$ on juuri, jonka kaksidesimaalinen likiarvo on 2,40.

Ratkaisu

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 - 2x - 9$. Yhtälön $x^3 - 2x - 9 = 0$ juuret ovat funktion f nollakohtia.

Koska funktio f on polynomifunktio, se on kaikkialla jatkuva.

On osoitettava, että funktiolla f on nollakohta välillä $[2,395; 2,405[$. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(2,395) \approx -0,05 < 0$$

$$f(2,405) \approx 0,10 > 0$$

Koska funktion arvot $f(2,395)$ ja $f(2,405)$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on nollakohta välillä $[2,395; 2,405[$. $\square$

Esimerkkejä jatkuvista funktioista ovat myös jatkuvien funktioiden itseisarvot.

ESIMERKKI 3

Ilmaise funktio ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja.

a) $|x|$ b) $|2x - 6|$

Ratkaisu

a) Kun luku x on epänegatiivinen, luvun x itseisarvo on luku x itse:

Kun $x \geq 0$, niin $|x| = x$.

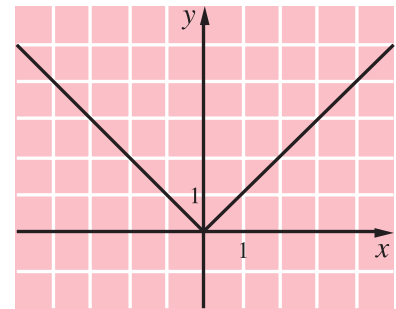
Kun luku x on negatiivinen, luvun x itseisarvo on luvun vastaluku $-x$:

Kun $x < 0$, niin $|x| = -x$.*

Siis

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{kun } x < 0 \\ x, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Funktion $|x|$ kuvaajaan kuuluu suoran $y = x$ se osa, missä $x \geq 0$, ja suoran $y = -x$ se osa, missä $x < 0$.



b) Luvun $2x - 6$ itseisarvo on luku $2x - 6$ itse silloin, kun luku $2x - 6$ on epänegatiivinen.

$$2x - 6 \geq 0$$

$$2x \geq 6 \quad | : 2 (> 0)$$

$$x \geq 3$$

Kun $x \geq 3$, niin $|2x - 6| = 2x - 6$.

Kun $x < 3$, luku $2x - 6$ on negatiivinen ja sen itseisarvo on vastaluku $-(2x - 6) = -2x + 6$.

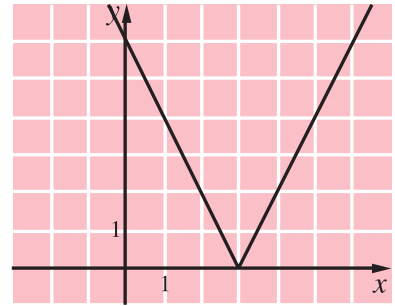
Kun $x < 3$, niin $|2x - 6| = -2x + 6$.

* Tässäkin voisi olla mukana luku nolla eli $x \leq 0$, sillä nollan vastaluku on nolla.

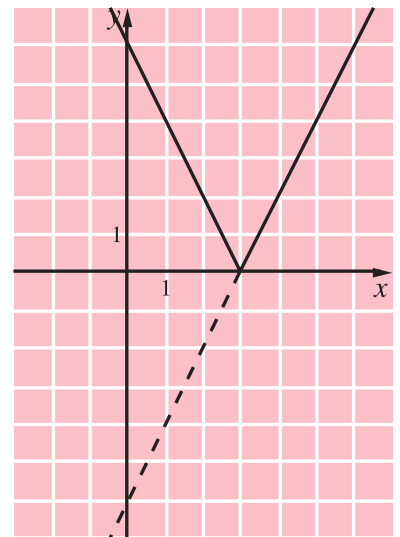
Siis:

$$|2x - 6| = \begin{cases} -2x + 6, & \text{kun } x < 3 \\ 2x - 6, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

Funktion $|2x - 6|$ kuvaajaan kuuluu suoran $y = 2x - 6$ se osa, missä $x \geq 3$, ja suoran $y = -2x + 6$ se osa, missä $x < 3$.



Funktion $|2x - 6|$ kuvaaja voidaan piirtää myös niin, että funktion $2x - 6$ kuvaajan (suoran $y = 2x - 6$) x -akselin alapuolella oleva osa peilataan x -akselin suhteen.*



Vastaus

$$\text{a) } |x| = \begin{cases} -x, & \text{kun } x < 0 \\ x, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } |2x - 6| = \begin{cases} -2x + 6, & \text{kun } x < 3 \\ 2x - 6, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

* Kuvaajan voi piirtää myös graafisella laskimella. Itseisarvofunktio on laskimessa abs. Funktio $|2x - 6|$ näppäillään laskimeen muodossa $\text{abs}(2x - 6)$.

Funktion f itseisarvo

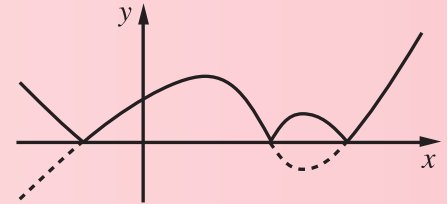
Funktio $|f|$, jonka arvo kohdassa x on funktion f arvon itseisarvo, voidaan ilmaista funktioiden f ja $-f$ avulla.

$$|f(x)| = f(x), \text{ kun } f(x) \geq 0$$

ja

$$|f(x)| = -f(x), \text{ kun } f(x) < 0$$

Funktion $|f|$ kuvaaja saadaan peilamalla funktion f kuvaajan x -akselin alapuolella olevat osat x -akselin suhteen.



Jos funktion f kuvaaja on katkeamaton käyrä, niin myös funktion $|f|$ kuvaaja on katkeamaton käyrä. Siis:

Jatkuvan funktion itseisarvo

Jos funktio f on jatkuva, niin myös funktio $|f|$ on jatkuva.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

64. a) Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 5x^2 + 11 = 0$ on juuri välillä $]4, 5[$.

b) Voidaan osoittaa, että yhtälöllä $x^3 - 5x^2 + 11 = 0$ on vain yksi juuri välillä $]4, 5[$. Määritä haarukoimalla juuren likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

65. Osoita, että funktio $f(x) = x^3 - x + 1$ saa jossakin kohdassa välillä $]1, 2[$ arvon π .

66. a) Funktion $f(x) = \frac{x+7}{x-5}$ arvot $f(3) = -5$ ja $f(6) = 13$ ovat erimerkkiset. Voidaanko tästä päätellä, että funktiolla f on nollakohta välillä $]3, 6[$?

b) Onko funktiolla f nollakohta välillä $]3, 6[$?

67. Osoita, että yhtälöllä $\frac{10}{x^4} = 5 - x$ on juuri, jonka kolmedesimaalinen likiarvo on 4,984.

68. Osoita, että jos $a > 0$, niin yhtälöllä $x^3 + ax - 1 = 0$ on juuri välillä $]0, 1[$.

69. Ilmaise funktio ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja.

a) $|x + 3|$ b) $|3x - 6|$

70. Ilmaise funktio ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja.

a) $x + |4 - x|$ b) $1 - |4 - x|$

71. Funktiolle f on $f(x) = \frac{x^2 - 25}{3x + 15}$, kun $x \neq -5$. Määrittele arvo $f(-5)$ niin, että funktio f on jatkuva kohdassa -5 .

72. Funktiolle f on $f(x) = \frac{1}{x-4}$, kun $x \neq 4$.

Voidaanko arvo $f(4)$ määritellä niin, että funktio f on jatkuva kohdassa 4?

73. Funktio f on määritelty lausekkeella

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \text{ kun } x \neq 0.$$

a) Ilmaise lauseke $\frac{x}{|x|}$ ilman itseisarvomerkkiä.

b) Voidaanko funktiolle f määritellä arvo $f(0)$ niin, että funktio f on jatkuva kohdassa 0?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

74. a) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + x + 100 = 0$ on ainakin yksi juuri välillä $] -5, -4[$.

b) Voidaan osoittaa, että yhtälöllä $x^3 + x + 100 = 0$ on vain yksi juuri välillä $] -5, -4[$. Määritä haarukoimalla juuren likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

75. Osoita, että funktio $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 7}$ saa jos-sain välin $]40, 41[$ pisteessä arvon 2007.

76. a) Osoita, että yhtälöllä $0,3x^4 = 50x^3 + 10\,000$ on juuri, jonka likiarvo ykkösten tarkkuudella on 167.

b) Määritä a-kohdan juuren likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

77. Osoita, että jos $0 < a < 1$, niin yhtälöllä $x^3 - x^2 - x + a = 0$ on ainakin yksi juuri välillä $]0, 1[$.

78. Ilmaise funktio ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä kuvaaja.

a) $|x + 2|$ b) $|2x - 3|$

79. Ilmaise funktio $f(x) = 2x - |1 - x|$ ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja.

80. Ilmaise funktion lauseke ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja.

a) $f(x) = |x^2 - 1|$

b) $g(x) = x^2 - |x^2 - 1|$

81. Funktio f on määritelty lausekkeella

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}, \text{ kun } x \neq -3. \text{ Määrittele arvo}$$

$f(-3)$ niin, että funktio f on kaikkialla jatkuva.

82. Lausekkeella, joka on muotoa $\frac{ax^2 + 6x}{2x - 1}$,

voidaan määritellä funktio f , joka on jatkuva

joukossa $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Millä a :n arvoilla on mah-

dollista määritellä arvo $f(\frac{1}{2})$ niin, että saadaan

kaikkialla jatkuva funktio f ? Mikä tällöin tulee

määritellä arvoksi $f(\frac{1}{2})$?

83. Suurin arvo, jonka jatkuva funktio f saa eräällä välillä $[a, b]$ on 4, ja pienin arvo, jonka funktio f saa välillä $[a, b]$, on -7 . Mikä on suurin ja mikä on pienin arvo, jonka funktio $|f|$ saa välillä $[a, b]$? Mihin tarvittiin tietoa funktion f jatkuvuudesta?

84. Missä kohdissa funktio on jatkuva?

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ 0, & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ 0, & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases}$$

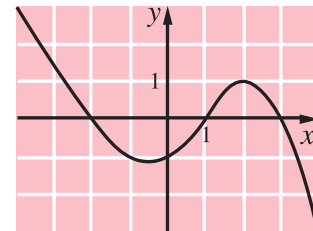
85. a) Osoita, että jokaiselle funktiolle f pätee

$$f = \frac{1}{2}(f + |f|) + \frac{1}{2}(f - |f|).$$

b) Ilmaise a-kohdassa yhteenlasketut funktiot

$$u = \frac{1}{2}(f + |f|) \text{ ja } v = \frac{1}{2}(f - |f|) \text{ ilman itseisarvomerkkejä.}$$

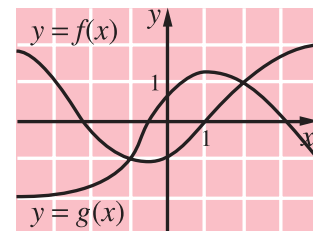
c) Kuviossa on erään funktion f kuvaaja välillä $[-4, 4]$. Piirrä samalla välillä b-kohdan funktioiden u ja v kuvaajat.



86. a) Olkoot f ja g kaksi funktiota. Tulkitse funktion $h = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ arvo $h(x)$ arvo-

jen $f(x)$ ja $g(x)$ avulla ilman itseisarvoja.

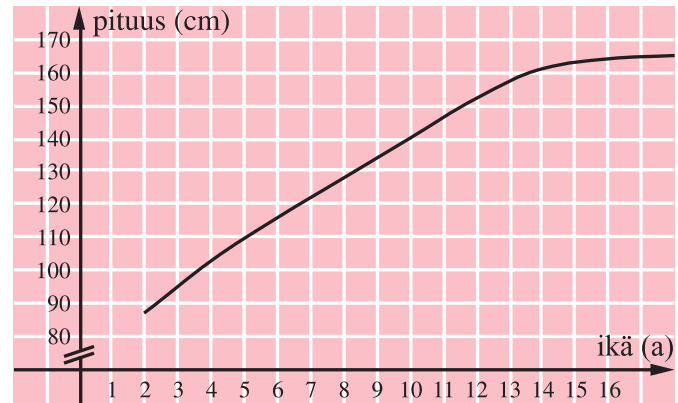
b) Kuviossa on eräiden funktioiden f ja g kuvaajat välillä $[-4, 4]$. Piirrä samalla välillä a-kohdan funktion h kuvaaja.



Funktion kasvunopeus

Ongelma 1

Kuviossa on suomalais-tyttöjen keskimääräinen kasvukäyrä. Mikä tyttöjen kasvunopeus on
a) kahdeksan vuoden
b) 14 vuoden iässä?

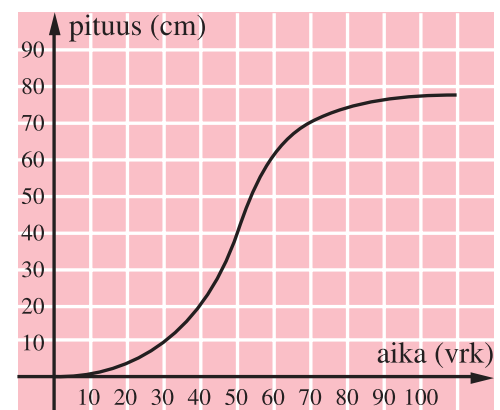


Ongelma 2

Piirrä graafisella laskimella funktion x^2 kuvaaja. Valitse zoomauskeskipisteeksi kuvaajan jokin piste ja lähennä kuvaajaa toistuvasti. Mitä huomaat? Tutki samalla tavalla funktion $x^3 - 60x^2$ kuvaajaa origossa. Tutki myös funktion $|x|$ kuvaajaa origossa ja vertaa edellisiin tilanteisiin. Pohdi, miksi maapallon joskus luultiin olevan litteä.

JOHDANTOESIMERKKI 1

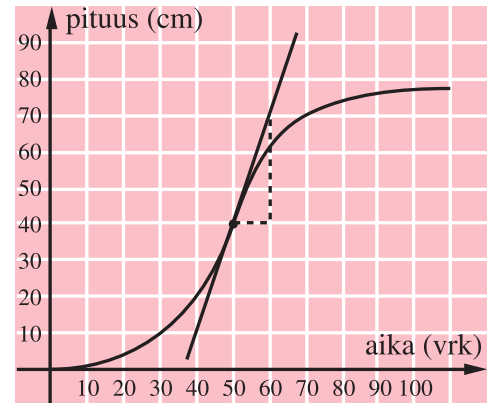
Kasvinviljelylaboratoriossa seurattiin viljakasvin pituuskasvua sadan vuorokauden ajan taimen puhkeamisesta alkaen.



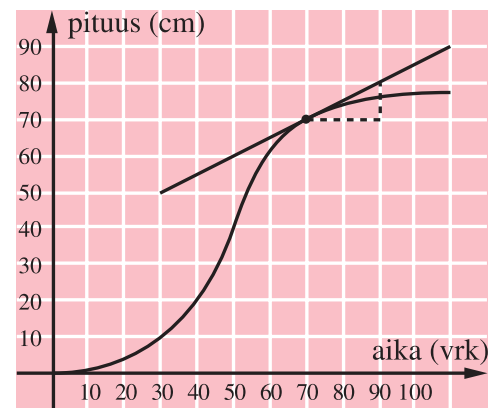
- Kasvukäyrä nousee jyrkimmin 50 vuorokauden kohdalla. Millä nopeudella kasvin pituus silloin lisääntyy? Kuinka pitkäksi taimi olisi tullut 100 vuorokaudessa tällä suurimmalla kasvunopeudella?
- 70 vuorokauden kuluttua kasvin kasvu on selvästi hidastunut. Mikä kasvin kasvunopeus tällöin on?

Ratkaisu

a) Kasvukäyrä nousee 50 vuorokauden kohdalla likimain suoravii-
vaisesti. Käyrän nousua seuraava
suora nousee noin 30 cm jokaisen
10 vuorokauden aikana. Kasvu-
nopeus on 3 cm vuorokaudessa.
Tällä nopeudella kasvi olisi 100
vuorokaudessa kasvanut kolmen
metrin mittaiseksi.



b) Kasvukäyrän jyrkkyyden paljas-
taa käyrälle 70 vuorokauden kohdal-
le piirretty käyrää sivuava suora, niin
sanottu käyrän tangentti. Suora nou-
see noin 10 cm jokaisen 20 vuoro-
kauden aikana. Kasvunopeus 70
vuorokauden kuluttua on noin
0,5 cm vuorokaudessa.



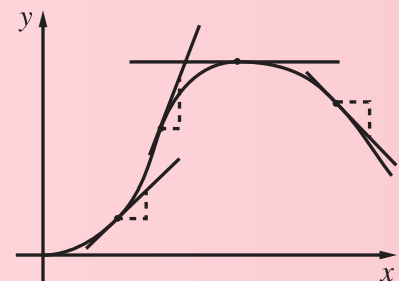
Vastaus

- a) 3 cm vuorokaudessa, 3 metrin mittaiseksi
b) 0,5 cm vuorokaudessa

Kasvukäyrästä saadaan selville kasvunopeus jollain hetkellä piirtämäl-
lä kasvukäyrää sivuava suora, niin sanottu käyrän *tangentti*. Kasvuno-
peuden ilmaisee tangentin kulmakerroin

$$\frac{y:n \text{ muutos}}{x:n \text{ muutos}}.$$

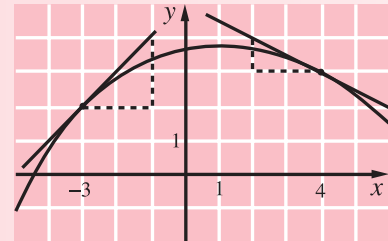
Kuvaajan tangentin kulmakerrointa voi-
daan käyttää funktion arvojen kasvuno-
peuden mittana, vaikka kuvaaja ei liity
mihinkään käytännön ilmiöön.



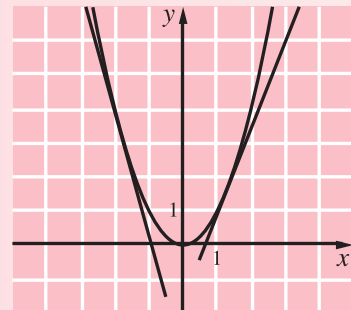
Funktion derivaatta

Jos funktion f kuvaajalle voidaan piirtää yksikäsitteisellä tavalla tangentti muuttujan arvon a kohdalle ja jos tämä tangentti ei ole pystysuora, niin funktio f on *derivoituva kohdassa a* . Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa a . Se merkitään $f'(a)$.

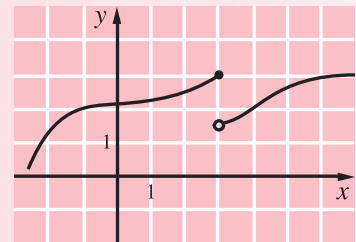
Kuvion funktion f derivaatta kohdassa -3 on 1 . Merkitään $f'(-3) = 1$. Derivaatta kohdassa 4 on $-\frac{1}{2}$. Merkitään $f'(4) = -\frac{1}{2}$.



Funktion x^2 kuvaajalle voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti jokaisen muuttujan arvon kohdalle. Funktio x^2 on derivoituva kaikkialla.



Kuvion funktio on epäjatkuva kohdassa 3 . Funktion kuvaajalle ei voida piirtää yksikäsitteistä tangenttia muuttujan arvon 3 kohdalle, joten funktio ei ole derivoituva kohdassa 3 .

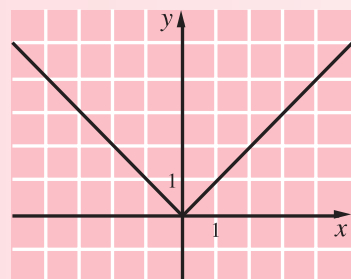


Funktio ei ole derivoituva sellaisessa kohdassa, jossa se on epäjatkuva. Siis pätee:

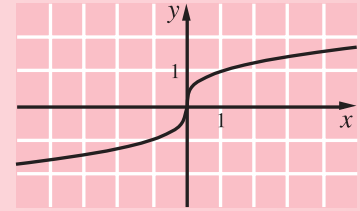
Jos funktio on derivoituva kohdassa a , se on jatkuva kohdassa a .

Jatkuva funktio ei kuitenkaan välttämättä ole derivoituva:

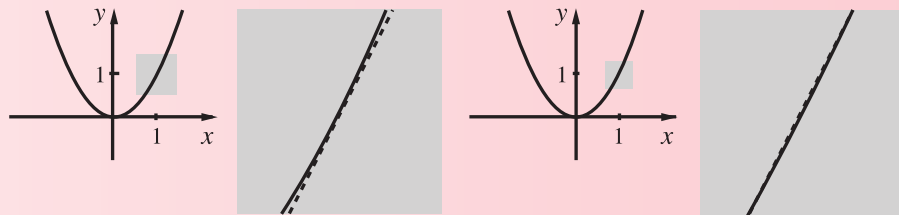
Funktion $|x|$ kuvaajalle ei voida piirtää origoon yksikäsitteistä tangenttia, joten funktio $|x|$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Funktio $|x|$ on derivoituva kaikkialla muualla, sillä suora on itse oma tangenttinsa.



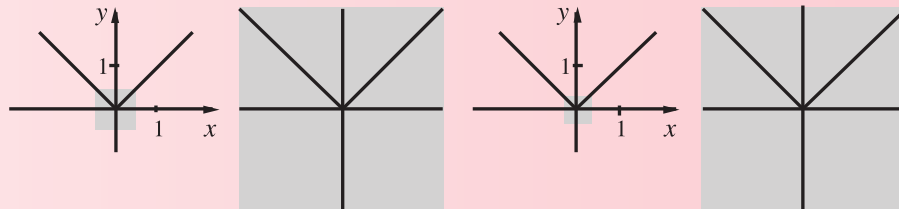
Kuviossa on kuutiojuurifunktion $\sqrt[3]{x}$ kuvaaja. Kuvaajalle voidaan piirtää origoon yksikäsitteinen tangentti (y-akseli), mutta tangentti on pystysuora. Kuutiojuurifunktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.



Jos funktio on derivoituva kohdassa a , ja funktion kuvaajaa lähenne-
tään muuttujan arvon a kohdalla, kuvaaja näyttää ennen pitkää suoral-
ta. Kuvaaja näyttää yhtyvän tangenttiinsa.



Kaksi funktion x^2 kuvaajan suurennusta (laskimella **ZOOM**/IN tai **BOX**) muuttujan arvon 1 kohdalla. Riittävästi suurennettuna kuvaaja näyttää suoralta. Laskimen **TRACE** -toiminnolla voi määrittää suoran pisteitä ja edelleen laskea suoran kulmakertoimen. Osoittautuu, että kulmakerroin on noin 2. Siis funktion x^2 derivaatta kohdassa 1 on noin 2.

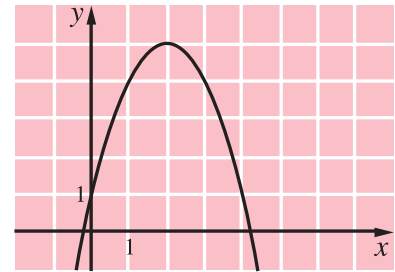


Kaksi funktion $|x|$ kuvaajan suurennusta origossa. Kuvaaja ei oikene suoraksi. Funktio $|x|$ ei ole derivoituva kohdassa 0.

Funktion derivoituvuudelle ja funktion derivaatalle annetaan seuraavassa luvussa täsmällisempi määritelmä, joka mahdollistaa derivaatan määrittämisen laskemalla. Määritelmä perustuu raja-arvon käsitteeseen.

ESIMERKKI 2

Päättele funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ kuvaajasta likimääräisesti funktion f derivaatta kohdassa a) 1 b) 4 c) 2.

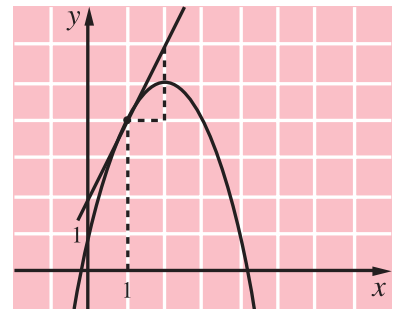


Ratkaisu

a) Funktion f derivaatta kohdassa 1 on funktion kuvaajalle muuttujan arvon 1 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään tangentti.* Kuvion perusteella tangentin kulmakerroin on likimain $\frac{2}{1} = 2$.

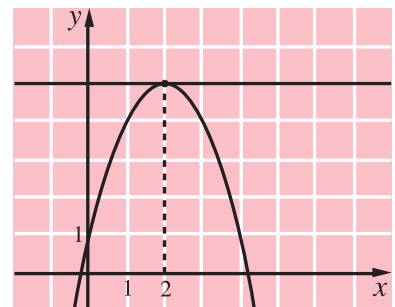
Siis funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ derivaatta kohdassa 1 on likimain 2, eli $f'(1) \approx 2$.



b) Muuttujan arvon 4 kohdalle piirretty käyrän tangentti on laskeva. Sen kulmakerroin on likimain $-\frac{4}{1}$. Funktion derivaatta kohdassa 4 on likimain -4 , eli $f'(4) \approx -4$.



c) Paraabelin huippuun muuttujan arvon 2 kohdalle piirretty tangentti on x -akselin suuntainen. x -akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0. Siis $f'(2) = 0$.



Vastaus

a) $f'(1) \approx 2$ b) $f'(4) \approx -4$ c) $f'(2) = 0$

* Joissakin graafisissa laskimissa on toiminto (**TanLn**) tai vastaava), jolla voidaan piirtää kuvaajan tangentti halutun muuttujan arvon kohdalle.

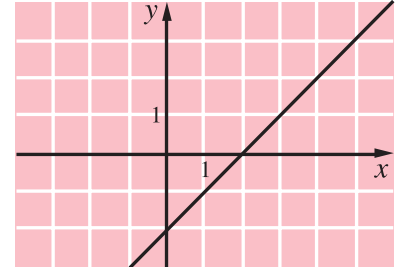
ESIMERKKI 3

Määritä funktion derivaatta jokaisella muuttujan arvolla.

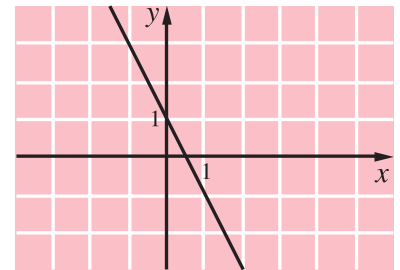
- a) $f(x) = x - 2$ b) $g(x) = -2x + 1$ c) vakiofunktio $h(x) = 4$

Ratkaisu

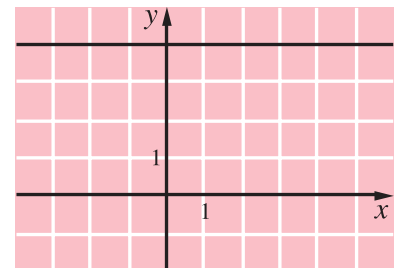
a) Funktion $f(x) = x - 2$ kuvaaja on suora $y = x - 2$. Suora on joka kohdassa itse oma tangenttinsa. Siis funktion f derivaatta on joka kohdassa yhtä suuri kuin suoran $y = x - 2$ kulmakerroin 1, eli $f'(x) = 1$ kaikilla x .



b) Funktion $g(x) = -2x + 1$ kuvaaja on suora $y = -2x + 1$. Suora on joka kohdassa itse oma tangenttinsa. Funktion g derivaatta on joka kohdassa yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin -2 , eli $g'(x) = -2$ kaikilla x .



c) Funktion $h(x) = 4$ kuvaaja on x -akselin suuntainen suora $y = 4$, jonka kulmakerroin on 0. Suora on joka kohdassa itse oma tangenttinsa, joten funktion h derivaatta joka kohdassa on 0, eli $h'(x) = 0$ kaikilla x .



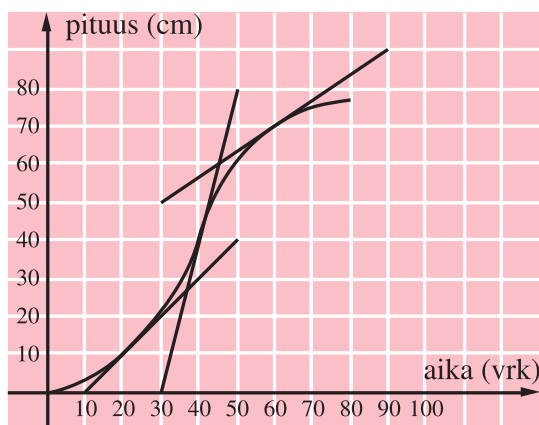
Vastaus

- a) $f'(x) = 1$ jokaisessa kohdassa x
 b) $g'(x) = -2$ jokaisessa kohdassa x
 c) $h'(x) = 0$ jokaisessa kohdassa x

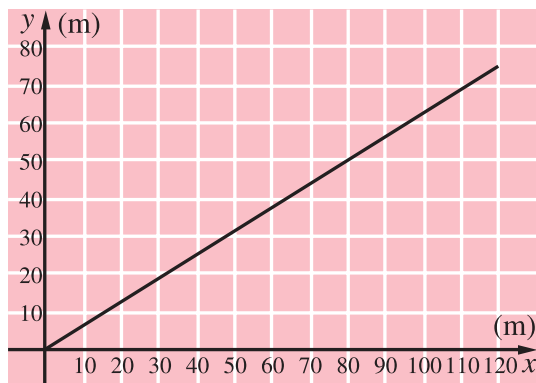
TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

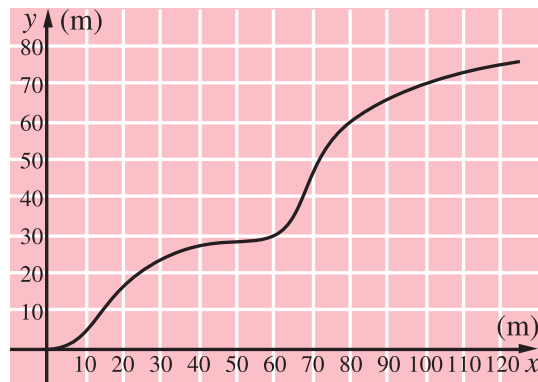
87. a) Päätele kasvukäyrälle piirretyistä tangenteista kasvin kasvunopeus 20 ja 60 vuorokauden kuluttua taimen puhkeamisesta.
b) Kuvioon on piirretty suurinta kasvunopeutta vastaava tangentti. Mikä suurin kasvunopeus oli?



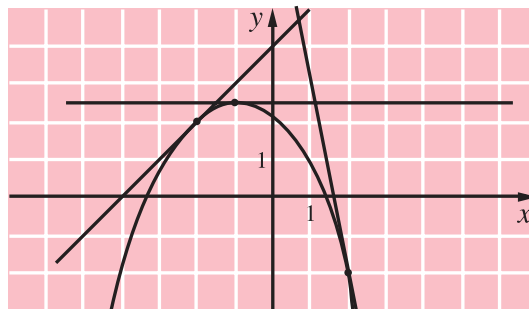
88. Nousun jyrkkyys ilmaistaan yleensä muuttamalla kulmakerroin prosenteiksi.
a) Määritä rinteen jyrkkyys.



- b) Määritä rinteen jyrkkyys 80 metrin päässä (vaakasuoraan mitattuna) rinteen alusta.

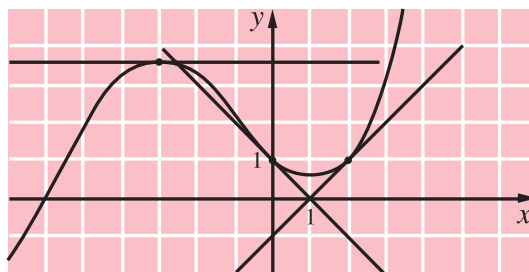


89. Kuviossa on erään kaikkialla derivoituvan funktion f kuvaaja. Määritä kuvioon piirrettyjen tangenttien avulla funktion derivaatta kohdissa -2 , -1 ja 2 .



90. Päätele funktion f kuvaajasta ja kuvaajalle piirretyistä tangenteista

- a) funktion derivaatat $f'(-3)$, $f'(0)$ ja $f'(2)$
b) funktion arvot $f(-3)$, $f(0)$ ja $f(2)$.



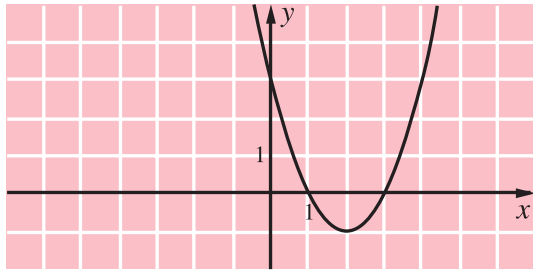
91. Määritä funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa x . Mitkä ovat erityisesti $f'(-1)$ ja $f'(3)$?

a) $f(x) = 5x - 7$ b) $f(x) = -4x + 1$

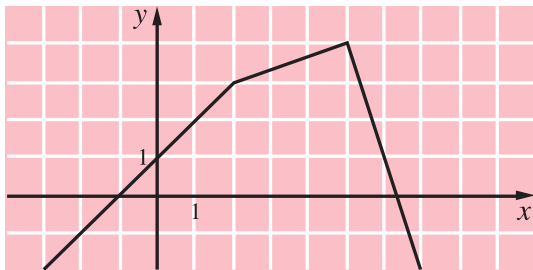
92. Mikä on vakiofunktion $f(x) = 7$ derivaatta jokaisessa kohdassa x ? Mikä on erityisesti funktion f derivaatta kohdassa a) $x = 3$ b) $x = -1$?

93. Kuviossa on erään kaikkialla derivoituvan funktion f kuvaaja. Päätele kuvaajasta, millä muuttujan arvoilla on

a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) > 0$ c) $f'(x) < 0$.



94. Kuviossa on erään jatkuvan funktion h kuvaaja, joka muodostuu janasta ja kahdesta puolisuorasta. Missä kohdissa funktio h ei ole derivoituva? Määritä funktion h derivaatta muissa kohdissa.

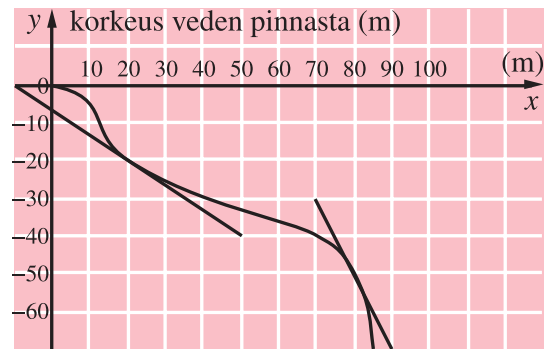


95. Jatkuvasta funktiosta f tiedetään, että $f(0) = -2$. Lisäksi tiedetään, että $f'(x) = 1$, kun $x < 3$ ja $f'(x) = \frac{1}{3}$, kun $x > 3$. Määritä funktion arvo $f(9)$.

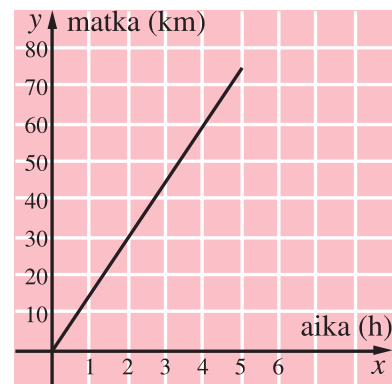
SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

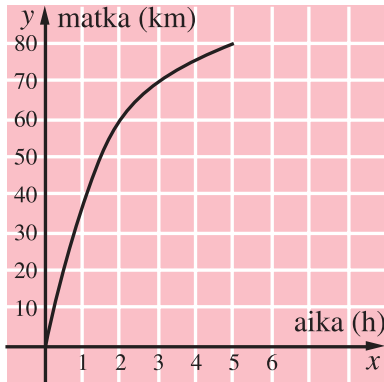
96. Päätele käyrästä ja sille piirretyistä tangentista, kuinka jyrkästi ranta viettää a) 20 metrin b) 40 metrin c) 80 metrin päässä vesirajasta. Ilmaise jyrkkyys prosentteina.



97. a) Pyöräretkeilijä ajoi päivämatkansa viidessä tunnissa. Kuvion suora havainnollistaa hänen etäisyyttään lähtöpaikasta, kun lähdöstä oli kulunut x tuntia. Millä nopeudella pyöräilijä ajoi?

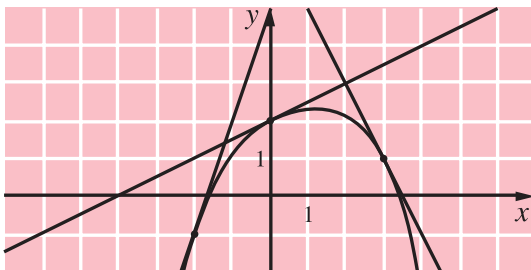


b) Kuvion käyrä havainnollistaa toisen pyöräilijän etäisyyttä lähtöpaikasta, kun lähdöstä oli kulunut x tuntia. Millä nopeudella pyöräilijä ajoi, kun lähdöstä oli kulunut kaksi tuntia? Entä mikä pyöräilijän nopeus oli, kun lähdöstä oli kulunut kolme tuntia?

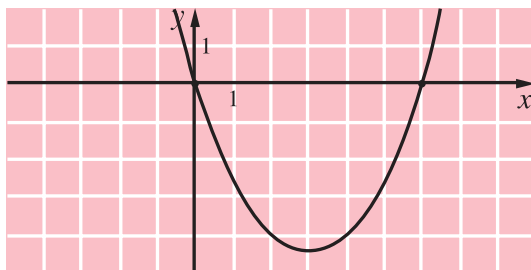


98. Määritä funktion f kuvaajasta ja sille piirretyistä tangenteista

- a) $f(3)$ ja $f'(3)$ b) $f(0)$ ja $f'(0)$
c) $f(-2)$ ja $f'(-2)$.



99. Kuviossa on funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ kuvaaja. Piirrä kuvaajalle tangentit ja määritä niiden avulla likimääräisesti $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$ ja $f'(4)$.

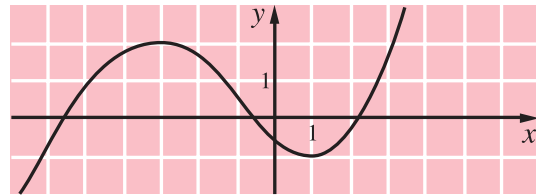


100. Määritä $f(4)$ ja $f'(4)$, kun

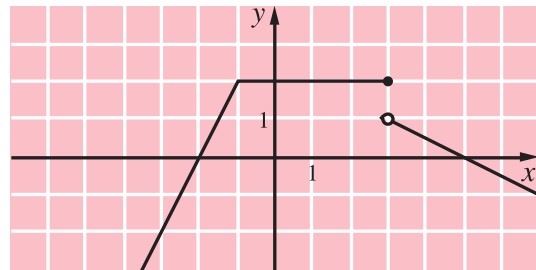
- a) $f(x) = -3x + 6$
b) $f(x) = -17$ kaikilla x .

101. Päätele funktion f kuvaajasta, millä muuttujan x arvoilla

- a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) > 0$
c) $f'(x) < 0$.



102. Funktion g kuvaaja muodostuu janasta ja kahdesta puolisuorasta. Missä kohdissa funktio g ei ole derivoituva? Mikä on funktion g derivaatta muissa kohdissa?



103. Jatkuvasta funktiosta f tiedetään, että funktion f arvo kohdassa 0 on 3 ja että funktion f derivaatta on 2, kun $x < 1$, ja -1 , kun $x > 1$. Määritä funktion f arvot $f(-1)$ ja $f(4)$.

104. Anna esimerkki funktiosta, joka on määritelty kaikilla muuttujan x reaaliarvoilla, joka on kaikkialla jatkuva ja joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 3$.

105. Funktio f on derivoituva kaikkialla, funktion f kuvaaja kulkee origon kautta ja funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa x on

- a) x b) $2 - x$.

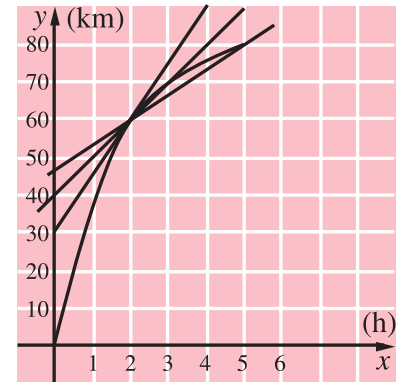
Hahmottele funktion f kuvaaja.

Derivaatta raja-arvona

Ongelma

Kuvion käyrä havainnollistaa pyöräilijän etääntymistä lähtöpaikastaan. Käytä hyväksi kuvioon piirrettyjä suoria ja selvitä, mikä oli pyöräilijän keskinopeus

- kolmen viimeisen tunnin
- kolmannen tunnin aikana.
- Mikä pyöräilijän nopeus oli, kun lähdöstä oli kulunut kaksi tuntia?



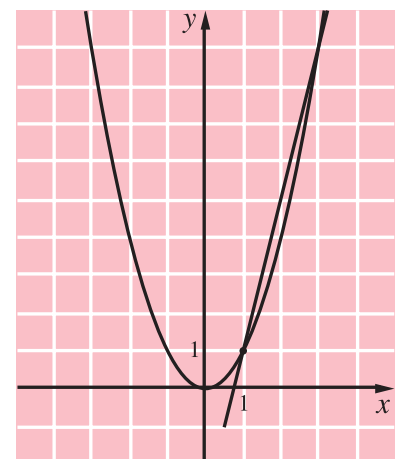
JOHDANTOESIMERKKI 1

Määritä funktion x^2 derivaatta kohdassa 1.

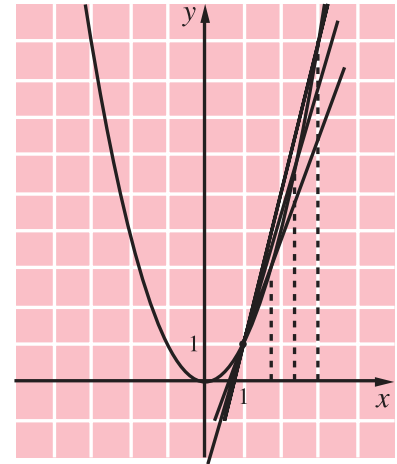
Ratkaisu

Funktion x^2 derivaatta kohdassa 1 on funktion kuvaajalle muuttujan arvon 1 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti voidaan muodostaa seuraavan rajankäyntiprosessin tuloksena:

Piirretään suora, joka leikkaa funktion x^2 kuvaajaa muuttujan arvon 1 kohdalla pisteessä $(1, 1)$ ja sen lisäksi toisessa pisteessä.

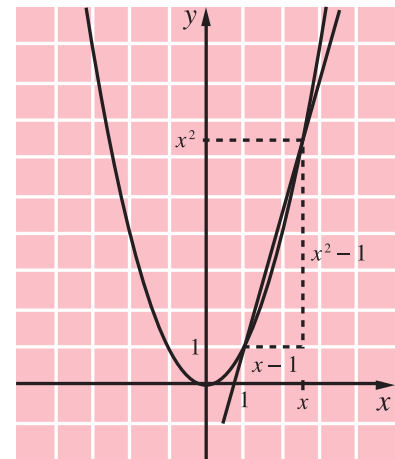


Kun toisen leikkauspisteen x -koordinaatti lähestyy kohtaa 1, leikkaava suora kiertyy kuvaajan tangentiksi pisteeseen $(1, 1)$.



Tutkitaan, mitä lukua leikkaavan suoran kulmakerroin lähenee, kun toisen leikkauskohdan x -koordinaatti lähenee kohtaa 1.

Jos suora leikkaa kuvaajaa arvojen 1 ja x kohdalla pisteissä $(1, 1)$ ja (x, x^2) , niin suoran kulmakerroin on $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$.



Kun x lähenee kohtaa 1, saadaan:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)\overset{1}{\cancel{x - 1}}}{\underset{1}{\cancel{x - 1}}} = x + 1 \rightarrow 1 + 1 =$$

2, kun $x \rightarrow 1$.

Siis funktion x^2 derivaatta kohdassa 1 on 2.

Vastaus

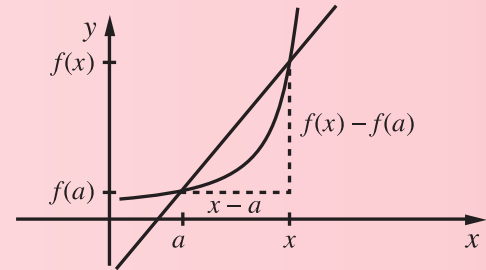
2

Derivaatta on aiemmin kuvailtu havainnollisesti funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimenä. Varsinaisesti derivaatta määritellään raja-arvona.

Erotusosamäärä

Jos suora leikkaa funktion f kuvaajan muuttujan arvojen a ja x kohdalla pisteissä $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$, suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Lauseke on *funktion f erotusosamäärä kohdassa a* .

Funktion f erotusosamäärä kohdassa a on siis suhde

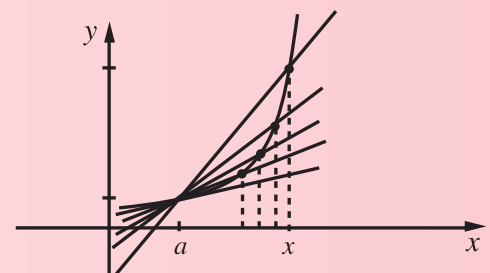
$$\frac{\text{funktion } f \text{ arvojen muutos}}{\text{muuttujan arvojen muutos}},$$

kun siirrytään muuttujan arvosta a arvoon x .

Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa 1 on

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Kun toinen leikkauskohta x lähestyy kohtaa a , leikkaava suora kiertyy kuvaajan tangentiksi pisteeseen $(a, f(a))$ edellyttäen, että kuvaajalla on tässä pisteessä tangentti. Leikkaavan suoran kulmakerroin lähestyy tällöin tangentin kulmakerrointa eli funktion f derivaattaa kohdassa a .



Derivaatan määritelmä

Jos funktion f erotusosamäärällä kohdassa a on raja-arvo kohdassa a , niin funktio f on *derivoituva kohdassa a* .

Raja-arvoa kutsutaan funktion f *derivaataksi kohdassa a* ja se merkitään $f'(a)$. Siis

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

ESIMERKKI 2

Mikä on funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa 5?

Ratkaisu

Funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa 5 on

$$\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{x^2 - 5^2}{x - 5} = \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

Määritetään erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 5.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 5)(\cancel{x - 5})}{\cancel{x - 5}} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$$

Siis funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa 5 on 10.

Vastaus

10

ESIMERKKI 3

Määritä $g'(5)$, kun $g(x) = \frac{1}{x}$.

Ratkaisu

Muodostetaan funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ erotusosamäärä kohdassa 5.

$$\frac{g(x) - g(5)}{x - 5} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5}$$

Määritetään erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 5.

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5} = \left(\overset{5/}{\frac{1}{x}} - \overset{x/}{\frac{1}{5}} \right) : (x - 5) = \left(\frac{5}{5x} - \frac{x}{5x} \right) : (x - 5)$$

$$= \frac{5-x}{5x} : (x - 5) = \frac{\overset{-1}{5-x}}{5x} \cdot \frac{1}{\underset{1}{x-5}}$$

$$= -\frac{1}{5x} \rightarrow -\frac{1}{5 \cdot 5} = -\frac{1}{25}, \text{ kun } x \rightarrow 5$$

$$\text{Siis } g'(5) = -\frac{1}{25}.$$

Vastaus

$$-\frac{1}{25}$$

Erotusosamäärän avulla voidaan perustella derivaatan ominaisuuksia.

Vakiolla kerrotun funktion derivaatta

Jos derivoituva funktio kerrotaan vakiolla, niin tulofunktion derivaatta on yhtä suuri kuin alkuperäisen funktion derivaatta samalla vakiolla kerrottuna.*

$$(kf)'(a) = kf'(a)$$

Jos funktio $f(x) = x^2$ kerrotaan vakiolla 3, saadaan funktio $h(x) = 3x^2$.

Esimerkin 2 nojalla $f'(5) = 10$. Tällöin $h'(5) = 3 \cdot 10 = 30$.

Funktioiden summan derivaatta

Kahden derivoituvan funktion summan derivaatta on yhtä suuri kuin funktioiden derivaattojen summa.**

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Funktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \frac{1}{x}$ summa on funktio $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Esimerkin 2 nojalla $f'(5) = 10$ ja esimerkin 3 nojalla

$$g'(5) = -\frac{1}{25}, \text{ joten } h'(5) = 10 + \left(-\frac{1}{25}\right) = \frac{249}{25}.$$

* Kaavassa merkintä kf tarkoittaa siis funktiota, jonka arvo jokaisessa kohdassa on funktion f arvo kerrottuna luvulla k eli $(kf)(x) = kf(x)$.

** Kaavassa merkintä $f + g$ tarkoittaa siis funktiota, jonka arvo jokaisessa kohdassa on funktioiden f ja g arvojen summa, eli $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Myöhemmin tässä kurssissa johdetaan derivoitukaavat myös funktioiden tulolle fg ja osamäärälle $\frac{f}{g}$. Kaavat ovat hieman monimutkaisempia, sillä funktioiden tulon derivaatta ei ole derivaattojen tulo eikä funktioiden osamäärän derivaatta ole derivaattojen osamäärä.

Derivointikaavan $(kf)'(a) = kf'(a)$ perustelu. Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa a . Funktion kf erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{kf(x) - kf(a)}{x - a}.$$

Osoitetaan, että erotusosamäärän raja-arvo kohdassa a on $kf'(a)$.

$$\frac{kf(x) - kf(a)}{x - a} = \frac{k(f(x) - f(a))}{x - a}$$

$$= k \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{Saatiin funktion } f \text{ erotusosamäärä kerrottuna luvulla } k.$$

$\rightarrow kf'(a)$, kun $x \rightarrow a$

Derivointikaavan $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ perustelu. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa a . Funktion $f+g$ erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a}.$$

Osoitetaan, että erotusosamäärän raja-arvo kohdassa a on $f'(a) + g'(a)$.

Muokataan erotusosamäärän lauseketta. Osoittautuu, että funktion $f+g$ erotusosamäärä on funktioiden f ja g erotusosamäärien summa.

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a}$$

$$= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a}$$

$$= \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Funktioiden f ja g erotusosamäärien summa.

$\rightarrow f'(a) + g'(a)$, kun $x \rightarrow a$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

- 106.** a) Muodosta funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdissa 4 ja -3 .
b) Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdissa 4 ja -3 .
- 107.** a) Muodosta funktion $f(x) = 7x - 3$ erotusosamäärä kohdassa 5.
b) Määritä derivaatta $f'(5)$.
- 108.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = x^3 + 5x$ derivaatta kohdassa 0.
- 109.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = \frac{6}{x}$ derivaatta kohdassa 2.
- 110.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = \frac{1}{10 - x^2}$ derivaatta kohdassa 3.
- 111.** a) Muodosta vakiofunktion $f(x) = c$ erotusosamäärä kohdassa a .
b) Määritä erotusosamäärän raja-arvona vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta kohdassa a .
- 112.** a) Olkoon $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \frac{1}{x}$. Määritä erotusosamäärän avulla $f'(-3)$ ja $g'(-3)$.
b) Määritä a-kohdan derivaattojen avulla funktioiden $h(x) = \frac{1}{4}x^2$, $u(x) = \frac{6}{x}$ ja $v(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{x}$ derivaatta kohdassa -3 .

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

- 113.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = x^2 - 3$ derivaatta kohdassa -1 .
- 114.** a) Muodosta funktion $f(x) = x^2 - 3x + 4$ erotusosamäärä kohdassa 0.
b) Määritä funktion f derivaatta kohdassa 0.
- 115.** a) Muodosta funktion $g(x) = \frac{1}{x-2}$ erotusosamäärä kohdassa 3.
b) Määritä $g'(3)$.
- 116.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ derivaatta kohdassa -1 .
- 117.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ derivaatta kohdassa 3.
- 118.** a) Muodosta funktion $f(x) = kx$ erotusosamäärä kohdassa a .
b) Määritä erotusosamäärän raja-arvona $f'(a)$.
- 119.** a) Osoita, että $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, ja määritä funktion x^3 derivaatta kohdassa 1.
b) Ilmaise lauseke $x^5 - 1$ tulona a-kohdan tapaan ja määritä funktion x^5 derivaatta kohdassa 1.
- 120.** a) Määritä erotusosamäärän avulla funktioiden $f(x) = x^4$ ja $g(x) = x^8$ derivaatat kohdassa 1.
b) Olkoon $h(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^8$. Määritä a-kohdan tulosten avulla $h'(1)$.

121. Oletetaan, että funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa a .

- a) Muodosta funktion $g(x) = f(x)^2$ erotusosamäärä kohdassa a .
- b) Ilmaise funktion $g(x)$ derivaatta kohdassa a funktion f arvon $f(a)$ ja derivaatan $f'(a)$ avulla.
- c) Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = x^2 + 4$ derivaatta kohdassa 5. Mikä on funktion $g(x) = (x^2 + 4)^2$ derivaatta kohdassa 5?

122. Osoita erotusosamäärän avulla, että funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva kohdassa 0.

123. Tutki, onko funktio $f(x) = x|x|$ derivoituva kohdassa 0. Piirrä funktion f kuvaaja.

124. Onko funktio derivoituva kohdassa 0? Jos derivaatta kohdassa 0 on olemassa, niin mikä se on?

a) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ 0, & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ 0, & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases}$

Derivaattafunktio

ESIMERKKI 1

Määritä $f'(a)$, kun $f(x) = x^2$. Käytä tulosta hyväksi ja määritä $f'(-\frac{5}{6})$.

Ratkaisu

Funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Määritetään erotusosamäärän raja-arvo kohdassa a .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(\cancel{x - a})}{\cancel{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a$$

Funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa a on $2a$, eli $f'(a) = 2a$.

Kun $a = -\frac{5}{6}$, saadaan $f'(-\frac{5}{6}) = 2 \cdot (-\frac{5}{6}) = -\frac{5}{3}$.

Vastaus

$$f'(a) = 2a, \quad f'(-\frac{5}{6}) = -\frac{5}{3}$$

Derivaattafunktio

Funktio f' , jonka arvo on funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa, jossa funktio f on derivoituva, on funktion f *derivaattafunktio*.

Edellisessä esimerkissä 1 osoitettiin, että funktion $f(x) = x^2$ derivaatta missä tahansa kohdassa a on $2a$ eli $f'(a) = 2a$. Jos a :n sijasta muuttujaa merkitään kirjaimella x , saadaan funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio $f'(x) = 2x$.

Funktion $f(x) = kx$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on k . Koska suora on itse oma tangenttinsa, funktion $f(x) = kx$ derivaatta jokaisessa kohdassa on k . Siis funktion $f(x) = kx$ derivaatafunkti on vakiofunktio $f'(x) = k$.

Vakiofunktion $f(x) = c$ kuvaaja on x -akselin suuntainen suora, jonka kulmakerroin on 0 . Siis vakiofunktion derivaatafunkti on vakiofunktio $f'(x) = 0$.*

Derivaatafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoimiseksi*.

Derivointimerkki D

Kun funktio ilmaistaan pelkästään lausekkeella nimeämättä sitä f , g tms., derivoiminen voidaan merkitä derivointimerkin D avulla.

Esimerkiksi on $Dx^2 = 2x$.

Vakiofunktion ja potenssifunktioiden derivoiminen

$Dc = 0$ Vakiofunktion derivaatafunkti on vakiofunktio 0 .

$Dx = 1$ Funktiota x derivaatafunkti on vakiofunktio 1 .

$Dx^2 = 2x$ Funktiota x^2 derivaatafunkti on funktio $2x$.

Yleisesti, kun n on positiivinen kokonaisluku:

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

Kun derivoidaan potenssifunktio x^n , niin eksponentti pienenee yhdellä ja alkuperäinen eksponentti tulee potenssin kertoimeksi.

Kaavan $Dx^n = nx^{n-1}$ perustelu. Määritetään funktion x^3 derivaatafunkti ja näytetään, kuinka menetelmä yleistyy muille eksponenteille.

Funktion x^3 erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a}.$$

* Funktiota $f(x) = kx$ ja vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatafunktiot määritettiin erotusosamäärän avulla tehtävissä 111 ja 118.

Lauseke voidaan supistaa, sillä

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2).$$

Tekijöihinjako perustellaan suorittamalla kertolasku.*

Supistamisen jälkeen erotusosamäärä tulee muotoon $x^2 + xa + a^2$, joten

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + xa + a^2) = a^2 + a \cdot a + a^2 = 3a^2.$$

Siis funktiolle $f(x) = x^3$ pätee $f'(a) = 3a^2$. Kun muuttujaa merkitään kirjaimella x , saadaan funktion $f(x) = x^3$ derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2$.

Yleisesti funktion x^n erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Lauseke voidaan supistaa, sillä jos n on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, niin lauseke $x^n - a^n$ voidaan ilmaista tulona

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}).^{**}$$

Supistamisen jälkeen erotusosamäärä tulee muotoon

$$x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}, \text{ joten}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \overbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})}^{n \text{ termiä}} \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + a^2a^{n-3} + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

Siis funktiolle $f(x) = x^n$ pätee $f'(a) = na^{n-1}$. Merkitsemällä muuttujaa kirjaimella x saadaan funktion $f(x) = x^n$ derivaattafunktio $f'(x) = nx^{n-1}$.

* $(x - a)(x^2 + xa + a^2) = x^3 + x^2a + xa^2 - x^2a - xa^2 - a^3 = x^3 - a^3$.

Kertolaskussa kaikki muut termit kumoutuvat, ja jäljelle jää vain erotus $x^3 - a^3$.

** Esimerkiksi $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)$,

$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$ jne.

ESIMERKKI 2

Derivoi funktio.

a) x^5 b) $-\frac{3}{2}x^4$ c) $5x^3 - 3x^2 + 9$

Ratkaisu

a) $Dx^5 = 5x^{5-1} \quad Dx^n = nx^{n-1}$
 $= 5x^4$

b) Edellisessä luvussa todistetun kaavan mukaan vakiolla kerrotun funktion derivaatta on yhtä suuri kuin alkuperäisen funktion derivaatta kerrottuna samalla vakiolla: $D(kf) = k Df$.

$$D\left(-\frac{3}{2}x^4\right) = -\frac{3}{2}Dx^4 = -\frac{3}{2} \cdot 4x^{4-1} = -\frac{3}{2} \cdot 4x^3 = -6x^3$$

c) Edellisessä luvussa todistetun kaavan mukaan funktioiden summan derivaatta on yhtä suuri kuin funktioiden derivaattojen summa:

$$D(f+g) = Df + Dg.$$

$$\begin{aligned} D(5x^3 - 3x^2 + 9) &= D(5x^3) - D(3x^2) + D9 = 5Dx^3 - 3Dx^2 + 0 \\ &= 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = 15x^2 - 6x \end{aligned}$$

Vastaus

a) $5x^4$ b) $-6x^3$ c) $15x^2 - 6x$

Polynomifunktio on vakioilla kerrottujen potenssifunktioiden summa. Vakioilla kerrotun funktion derivaatta on alkuperäisen funktion derivaatta kerrottuna samalla vakioilla ja funktioiden summan derivaatta on derivaattojen summa. Siis:

Polynomifunktion derivoiminen

Polynomifunktio derivoidaan termeittäin niin, että derivoidaan jokainen muuttujan potenssi.

ESIMERKKI 3

Määritä $f'(-3)$, kun $f(x) = 4x^3 - 11x - 7$.

Ratkaisu

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 11 \cdot 1 - 0 = 12x^2 - 11 \quad \text{Derivoidaan muuttujan potenssit.}$$

Sijoitetaan $x = -3$.

$$f'(-3) = 12 \cdot (-3)^2 - 11 = 108 - 11 = 97$$

Vastaus

97

ESIMERKKI 4

Millä muuttujan arvoilla funktion $g(t) = t(t - 5)^2$ derivaatta on negatiivinen?

Ratkaisu

Ennen derivoimista funktion lauseke saatetaan polynomin muotoon suorittamalla neliöön korottaminen ja kertolasku.

$$\begin{aligned} g(t) &= t(t - 5)^2 = t(t^2 - 10t + 25) && \text{Muistikaava } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \\ &= t^3 - 10t^2 + 25t \end{aligned}$$

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 10 \cdot 2t + 25 \cdot 1 && \text{Derivoidaan muuttujan potenssit.} \\ &= 3t^2 - 20t + 25 \end{aligned}$$

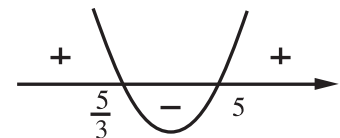
Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Määritetään derivaatafunktion $g'(t)$ nollakohdat.

$$3t^2 - 20t + 25 = 0$$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 25}}{2 \cdot 3} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6}$$

$$t = \frac{20 + 10}{6} = 5 \quad \text{tai} \quad t = \frac{20 - 10}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Funktion $g'(t)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.*



Funktion $g'(t)$ arvot ovat negatiivisia, kun $\frac{5}{3} < t < 5$.

Vastaus

$$\frac{5}{3} < t < 5$$

* Toinen tapa tutkia funktion $g'(t)$ merkkejä on laskea yksi funktion arvo jokaiselta lukusuoran väliltä $]-\infty, \frac{5}{3}[$, $]\frac{5}{3}, 5[$ ja $]5, \infty[$ ja kirjata arvojen merkit merkki-kaavioon.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

125. Määritä.

- a) Dx^3 b) $D\frac{x^6}{3}$ c) $D(-5x^4)$
 d) $D(-\frac{5}{4}x)$ e) $D(-19)$

126. Derivoi funktio $f(x) = 5x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 7x - 6$.127. Määritä $f'(-1)$, kun $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$.128. Määritä funktion $g(t) = t(3 - t)$

- a) derivaatta kohdassa 0
 b) derivaattafunktion nollakohdat.

129. Määritä $f(-1)$ ja $f'(-1)$, kun $f(x) = x(3x + 1)^2$.130. Derivoi funktio $f(x) = \frac{x^4 - 5x^3}{6}$. Saata

lauseke ensin polynomin muotoon termeittäin jakamalla.

131. Millä muuttujan arvoilla funktion derivaatta on negatiivinen?

- a) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 12x$ b) $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$

132. Vehnäkasvin kuivapaino (grammoina) t viikon kuluttua oraan puhkeamisesta voidaan likimain ennustaa funktiolla
$$m(t) = -\frac{2}{675}t^3 + \frac{1}{15}t^2.$$

Millä nopeudella kasvin paino kasvaa kahden ja kahdeksan viikon kuluttua?

133. Olkoon $f(x) = x^5 - bx^2 + 19$. Millä vakion b arvolla on $f'(1) = -3$?SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

134. Määritä.

- a) Dx^{17} b) $D(-\frac{x^5}{4})$
 c) $D2007$ d) $D\pi^2$

135. Derivoi funktio.

- a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 9$
 b) $h(x) = -4x^3 + 11x - 7$

136. Pilvenpiirtäjän huipulta pudotettu kivi on t sekunnin kuluttua pudotushetkestä pudonnut matkan $s(t) = 4,9t^2$ (yksikkönä metri). Millä nopeudella kivi putoaa a) kolmen sekunnin b) viiden sekunnin kuluttua?

137. Olkoon $h(s) = s^9 - s^6$. Määritä $h(-1)$ ja $h'(-1)$.

138. Määritä funktion derivaattafunktio.

- a) $h(x) = \frac{2}{3}(4x^6 - 6x)$ b) $f(t) = \frac{t - 2t^3}{6}$

139. Missä kohdassa funktion $f(t) = (t - 3)^2$ derivaatta on 6?140. Olkoon $f(x) = x(x^2 - 75)$. Määritä

- a) funktion f arvo kohdassa 0
 b) funktion f derivaatta kohdassa 0
 c) kohdat, joissa funktion f derivaatta on 0.

141. Millä muuttujan arvoilla funktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x - 19$$

derivaatta on positiivinen?

142. Pallo heitetään suoraan ylöspäin nopeudella 20 m/s. Pallon korkeuden maan pinnasta t sekunnin kuluttua heittohetkestä ilmaisee likimääräisesti funktio $h(t) = 20t - 5t^2$.

- a) Kuinka kauan pallo viipyy ilmassa?
- b) Mikä on pallon nopeus maanpinnan suhteen yhden sekunnin, kahden sekunnin ja kolmen sekunnin kuluttua?
- c) Millä nopeudella pallo kohtaa maanpinnan?

143. Derivoi funktio.

a) $g(t) = s^2t + s$ b) $h(s) = s^2t + s$

144. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktion $f(s) = as^2 + a^2s$ derivaattafunktiolla on nollakohta 7.

Käyrän tangentti

ESIMERKKI 1

Määritä funktion $f(x) = x^3 + 1$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn

- a) tangentin kulmakerroin
- b) tangentin yhtälö
- c) normaalin kulmakerroin
- d) normaalin yhtälö.

Ratkaisu

a) Funktion $f(x) = x^3 + 1$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion derivaatta $f'(1)$.

Derivoidaan funktio f ja sijoitetaan derivaattafunktioon $x = 1$.

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

Tangentin kulmakerroin on 3.

b) Jos suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja suoran kulmakerroin on k , niin suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

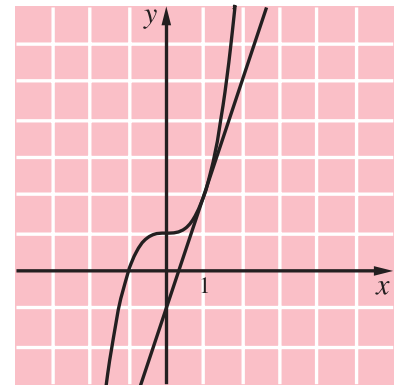
Sijoitetaan kaavaan pisteen $(1, 2)$ koordinaatit $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ja tangentin kulmakerroin $k = 3$.

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

$$y - 2 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 1$$

Tangentin yhtälö on $y = 3x - 1$.

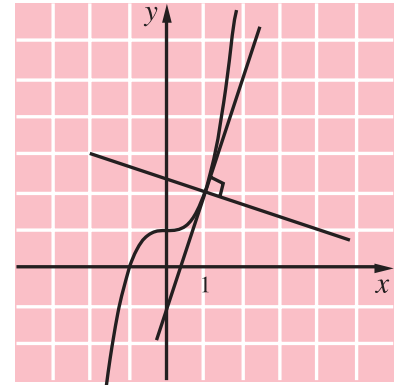


c) Käyrän normaali on kohtisuorassa samaan käyrän pisteeseen piirrettyä tangenttia vastaan. Suorat, joiden kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2 , ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos niiden kulmakertoimien tulo on -1 :

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Jos suoran kulmakerroin on k , sen normaalin kulmakerroin on siis kulmakertoimen k käänteisluvun vastaluku $-\frac{1}{k}$.

Funktion $f(x) = x^3 + 1$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 3 . Samaan pisteeseen piirretyn normaalin kulmakerroin on kulmakertoimen 3 käänteisluvun vastaluku $-\frac{1}{3}$.



d) Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

missä $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ja $k = -\frac{1}{3}$.

$$y - 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Normaalin yhtälö on $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Vastaus

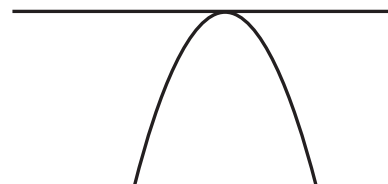
a) 3 b) $y = 3x - 1$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

ESIMERKKI 2

Missä pisteessä paraabelin $y = -x^2 - 5x - 7$ huippu on?
Piirrä paraabeli.

Ratkaisu

Paraabeli $y = -x^2 - 5x - 7$ on funktion $f(x) = -x^2 - 5x - 7$ kuvaaja. Paraabelin huippuun piirretty tangentti on x -akselin suuntainen. x -akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on nolla, joten huipun kohdalla funktion f derivaatta on nolla.



Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -2x - 5$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$-2x - 5 = 0$$

$$-2x = 5$$

$$x = -2,5$$

Huipun x -koordinaatti on $-2,5$.

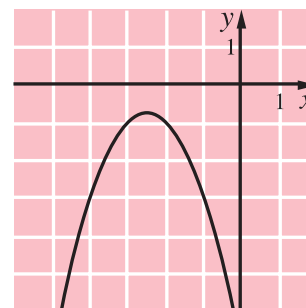
Huipun y -koordinaatti saadaan sijoittamalla x -koordinaatti paraabelin yhtälöön.

$$y = -(-2,5)^2 - 5 \cdot (-2,5) - 7 = -6,25 + 5 \cdot 2,5 - 7 = -0,75$$

Paraabelin huippu on pisteessä $(-2,5; -0,75)$.

Paraabeli $y = -x^2 - 5x - 7$ aukeaa alaspäin. Piirtämistä varten määritetään muutama paraabelin piste huipun kummaltakin puolelta. Pisteiden määrittämisessä voidaan käyttää hyväksi paraabelin symmetriaa.

x	$y = -x^2 - 5x - 7$	(x, y)
-4	-3	$(-4, -3)$
-3	-1	$(-3, -1)$
-2,5	-0,75	$(-2,5; -0,75)$
-2	-1	$(-2, -1)$
-1	-3	$(-1, -3)$



Vastaus

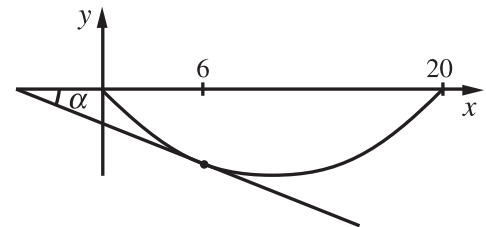
huippu $(-2,5; -0,75)$

ESIMERKKI 3

Kanava on 20 metriä leveä, ja sen pohja on rakennettu paraabelin $y = 0,05x^2 - x$ x -akselin alapuolisen osan muotoiseksi. Koordinaatiston yksikkö on metri. Mikä on kanavan pohjan kaltevuuskulma 6,0 metrin päässä rannasta?

Ratkaisu

Kaltevuuskulma on tangentin ja x -akselin välinen kulma.



Tangentin kulmakerroin x metrin päässä rannasta on funktion $f(x) = 0,05x^2 - x$ derivaatta kohdassa x .

$$f'(x) = 0,05 \cdot 2x - 1 = 0,1x - 1$$

Kulmakerroin 6,0 metrin päässä rannasta on

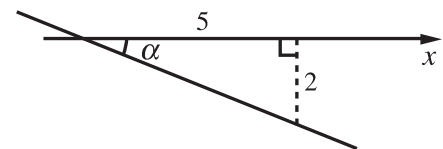
$$f'(6) = 0,1 \cdot 6 - 1 = -0,4 = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Tangentin ja x -akselin välisen kulman suuruus voidaan määrittää kulmakertoimen avulla.*

Apukolmiosta saadaan:

$$\tan \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\alpha \approx 22^\circ$$



Vastaus

22°

* Tangentin suuntakulma voidaan myös laskea suoraan yhtälöllä $\tan \alpha = k$.

Siis $\tan \alpha = -0,4$, joten $\alpha = -22^\circ$. Kulma voidaan määrittää myös tangentin suunta-vektorin $\vec{u} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ ja x -akselin suuntavektorin $\vec{v} = \vec{i}$ pistetulon avulla:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{5}{\sqrt{29} \cdot 1}.$$

ESIMERKKI 4

Mihin käyrän $y = x - x^2$ pisteisiin piirretyt käyrän tangentit kulkevat pisteen $(0, 4)$ kautta?

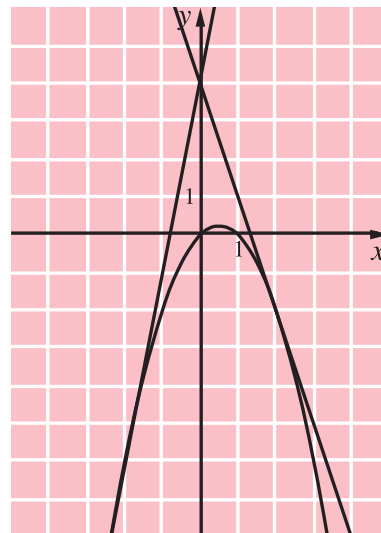
Ratkaisu

Käyrän $y = x - x^2$ pisteet ovat muotoa $(a, a - a^2)$. Muodostetaan käyrälle pisteeseen $(a, a - a^2)$ piirretyn tangentin yhtälö ja ratkaistaan, millä a :n arvoilla tangentti kulkee pisteen $(0, 4)$ kautta.*

Käyrälle $y = x - x^2$ pisteeseen $(a, a - a^2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = x - x^2$ derivaatta kohdassa a .

$$f(x) = x - x^2$$

$$f'(x) = 1 - 2x$$



Tangentin kulmakerroin on $f'(a) = 1 - 2a$.

Pisteen $(a, a - a^2)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö on

$$y - (a - a^2) = (1 - 2a)(x - a), \quad y - y_0 = k(x - x_0), \text{ missä } x_0 = a, y_0 = a - a^2 \text{ ja } k = 1 - 2a.$$

Piste $(0, 4)$ on tangentilla, jos sen koordinaatit $x = 0$ ja $y = 4$ toteuttavat tangentin yhtälön.

$$4 - (a - a^2) = (1 - 2a)(0 - a)$$

$$4 - a + a^2 = -a + 2a^2$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2 \text{ tai } a = -2$$

Kun $a = 2$, käyrän piste $(a, a - a^2)$ on $(2, -2)$.

Kun $a = -2$, käyrän piste $(a, a - a^2)$ on $(-2, -6)$.

Vastaus

pisteisiin $(2, -2)$ ja $(-2, -6)$

* Käyrän pisteen merkitsemiseen tarvittiin uusi kirjain a , sillä x on muuttujana suoran yhtälössä.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

145. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 3x$ kuvaajalle pisteeseen, jonka x -koordinaatti on 1, piirretyn a) tangentin b) normaalin yhtälö.

146. Määritä funktion $f(x) = x^3 + 2$ kuvaajalle pisteeseen $(0, 2)$ piirretyn a) tangentin b) normaalin yhtälö.

147. Mikä on paraabelin huipun x -koordinaatti?

a) $y = -x^2 + 6x - 9$

b) $y = 3x^2 + 12x$

148. Määritä paraabelin $y = x^2 - 5x + 4$ huippu ja piirrä paraabeli.

149. Mihin paraabelin $y = x^2 - 5x$ pisteeseen piirretty tangentti on suoran $y = -3x + 5$ suuntainen? Mikä tämän tangentin yhtälö on?

150. Kun kappale, jonka ilmanvastus on pieni, singotaan vinosti ylöspäin, sen lentorata on paraabelin muotoinen. Jos kappale singotaan 45° :n kulmassa ja lähtönopeus on v (m/s), lentorata noudattaa likimain paraabelia

$$y = x - \frac{10}{v^2} x^2.$$

Koordinaatiston yksikkönä on metri ja heittopaikka sijaitsee origossa.

Pesäpallo lyödään vinosti ylöspäin 45° :n kulmassa lähtönopeudella 20 m/s.

a) Kuinka korkealla pallo käy?

b) Missä kulmassa pallo kohoaa 10 metrin päässä lyöntipaikasta?

151. Missä kulmassa paraabeli $y = x^2 - 3x + 2$ leikkaa y -akselin? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella. *Suoran ja käyrän välinen kulma* on suoran ja käyrälle leikkauspisteeseen piirretyn tangentin välinen kulma.

152. Määritä paraabelin $y = x^2$ pisteen $(3, 0)$ kautta kulkevien tangenttien yhtälöt.

153. Osoita, että paraabelit $y = -x^2 + 3x + 2$ ja $y = -x^2 + 5x - 2$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti. *Kahden käyrän välinen kulma* on leikkauspisteisiin piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

154. Kaksi käyrää *sivuaa* toisiaan käyrien yhteisessä pisteessä, jos niillä on tässä pisteessä yhteinen tangentti. Osoita, että funktion $f(x) = x^3 + 1$ kuvaaja sivuaa paraabelia $y = x^2 + x$ pisteessä $(1, 2)$.

155. Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ kuvaajan pisteeseen, joka ei ole origo, piirretään kuvaajan normaali ja x -akselin suuntainen suora. Osoita, että suorien y -akselista erottama jana on aina yhtä pitkä piirretäänpä suorat mihin kuvaajan pisteeseen tahansa. Kuinka pitkä jana on?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

156. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 5$ kuvaajalle pisteeseen $(2, -1)$ piirretyn a) tangentin b) normaalin yhtälö.

157. Jos auton renkaat kaarteessa menettävät otteen tiehen, auto jatkaa matkaansa kaarteeseen $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ kovalla vauhdilla alhaalta vasemmalta ja suistuu tieltä pisteessä $(2, 3)$. Missä pisteessä auto törmää x -akselille rakennettuun lumiaitaan?

158. Mihin käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ pisteisiin piirretty tangentti on yhdensuuntainen suoran $y = 3x + 11$ kanssa?

159. a) Missä pisteessä paraabelin $y = -x^2 + 6x - 5$ huippu on? Piirrä paraabeli.
 b) Piirrä funktion $f(x) = |-x^2 + 6x - 5|$ kuvaaja.

160. Silta on sivukuvassa paraabelin $y = -0,0005x^2 + 0,4x - 45$ x -akselin yläpuolisen osan muotoinen. Kuinka korkea silta on? Koordinaatiston yksikkö vastaa yhtä metriä.

161. Millä kertoimien a ja b arvoilla paraabelin $y = x^2 + ax + b$ huippu on pisteessä $(3, 7)$?

162. Vuori kohoaa järven rannasta paraabelin $y = 1,6x - 0,0008x^2$ x -akselin yläpuolisen osan muotoisena. Koordinaatiston yksikkö on metri. Mikä vuorenrinteen jyrkkyys on a) 200 metrin b) 800 metrin päässä (vaakasuoraan mitattuna) rinteestä alusta? Ilmaise jyrkkyys muuttamalla kulmakerroin prosenteiksi.

163. Tien kaarre on paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2$ muotoinen. Kuinka monta astetta tie kääntyy pisteiden $(0, 0)$ ja $(2, 2)$ välillä? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

164. Mihin käyrän $y = x^3$ pisteisiin piirretyt käyrän tangentit kulkevat pisteen $(4, 0)$ kautta?

165. Missä kulmassa paraabelit $y = x^2 - 1$ ja $y = x^2 - x$ leikkaavat toisensa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

166. Osoita, että käyrät $y = x^3$ ja $y = 2x^2 - x$ sivuavat toisiaan toisessa yhteisessä pisteessään.

167. Paraabelille $y = x^2$ piirretään normaali pisteeseen (a, a^2) , missä $a \neq 0$. Mitä pistettä normaalin ja y -akselin leikkauspiste lähestyy, kun a lähestyy lukua nolla?

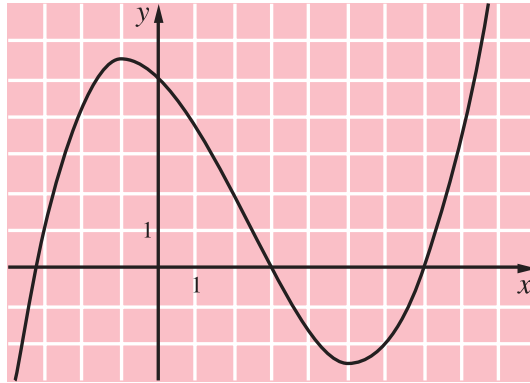
168. Piirrä graafisella laskimella käyräparven $y = ax - x^2$ käyriä niin, että saat parvesta havainnollisen kuvan. Millä käyrällä kaikkien paraabelien $y = ax - x^2$ huiput ovat?

169. Osoita, että paraabeli $y = x^2$ näkyy jokaisesta suoran $y = -\frac{1}{4}$ (paraabelin johtosuoran) pisteestä suorassa kulmassa.

170. Osoita, että positiivisen y -akselin suunnasta tulevat valonsäteet heijastuvat paraabelista $y = x^2$ paraabelin polttopisteeseen $(0, \frac{1}{4})$.

Tätä paraabelin ominaisuutta hyödynnetään muun muassa paraboloidin muotoisissa antenneissa (kurssi Analyttinen geometria). Valonsäde heijastuu niin, että sen tulokulma – säteen ja käyrän normaalin välinen kulma – on yhtä suuri kuin lähtökulma.

Polynomifunktion kulku



Ongelma

Kuviossa on erään funktion f kuvaaja.

a) Kumpi funktion arvoista $f(1)$ ja $f(3)$ on suurempi? Valitse väliltä $[-1, 5]$ kaksi muuta muuttujan arvoa x_1 ja x_2 niin, että $x_1 < x_2$. Kumpi funktion arvoista $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ on suurempi?

b) Kumpi funktion arvoista $f(6)$ ja $f(8)$ on suurempi? Valitse väliltä $[5, \infty[$ kaksi muuta muuttujan arvoa x_1 ja x_2 niin, että $x_1 < x_2$. Kumpi funktion arvoista $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ on suurempi?

c) Laadi funktion f derivaatafunktion f' merkkikaavio, josta ilmenevät derivaatafunktion nollakohdat ja derivaatafunktion merkki lukusuoran eri osissa.

$f'(x)$

--	--	--

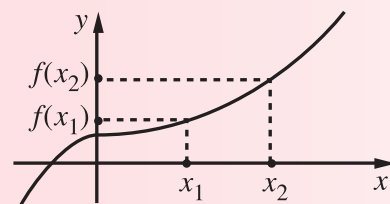
Kasvavan funktion ja vähenevän funktion määritelmät perustuvat muuttujan arvojen suuruusjärjestyksen ja funktion arvojen suuruusjärjestyksen vertaamiseen.

Aidosti kasvava ja aidosti vähenevä funktio

Funktio f on *aidosti kasvava** lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvojen suuretessa myös funktion arvot suurenevät eli

jos $x_2 > x_1$, niin $f(x_2) > f(x_1)$.

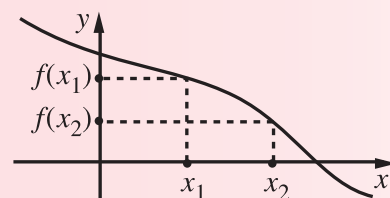
Aidosti kasvava funktio saa aina suuremman arvon kahdesta pisteestä oikeanpuolisessa.



Funktio f on *aidosti vähenevä* lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvojen suuretessa funktion arvot pienenevät eli

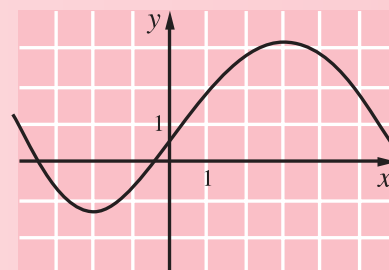
jos $x_2 > x_1$, niin $f(x_2) < f(x_1)$.

Aidosti vähenevä funktio saa aina suuremman arvon kahdesta pisteestä vasemmanpuolisessa.



* Määre *aidosti* liittyy vaatimukseen, että muuttujan arvojen suuretessa funktion arvot todella suurenevät. Funktio on *kasvava*, jos sen arvo suuremmalla muuttujan arvolla on suurempi *tai yhtä suuri* kuin pienemmällä muuttujan arvolla. Esimerkiksi vakiofunktio (kuvaaja vaakasuora) on kasvava mutta ei aidosti kasvava. Vastaavasti funktio on *vähenevä*, jos sen arvo suuremmalla muuttujan arvolla on pienempi tai yhtä suuri kuin pienemmällä muuttujan arvolla. Esimerkiksi vakiofunktio on vähenevä mutta ei aidosti vähenevä.

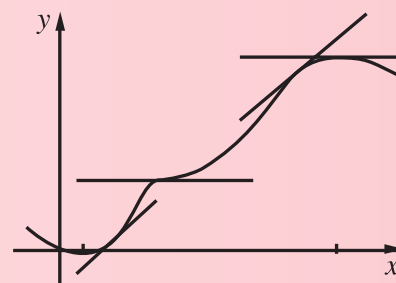
Kuvion funktio on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, -2]$, aidosti kasvava välillä $[-2, 3]$ ja aidosti vähenevä välillä $[3, \infty[$. Huomaa, että pisteet -2 ja 3 sisältyvät sekä näissä pisteissä päättyvään että niissä alkavaan väliin.



Derivoituvan funktion kasvaminen ja väheneminen

Derivoituvan funktion kasvaminen ja väheneminen voidaan selvittää tutkimalla derivaattafunktion merkkiä.

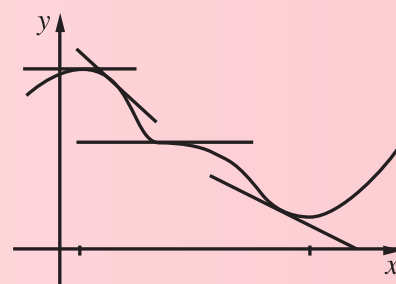
Jos funktion kuvaajalle jollakin välillä piirretyt tangentit ovat nousevia suoria, niin funktio on tällä välillä aidosti kasvava. Välillä saa olla myös erillisiä kohtia, joissa tangentti on vaakasuora, niin sanottuja *terassikohtia*.



Siis pätee:

Jos $f'(x) \geq 0$ kaikissa välin pisteissä ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä, niin funktio on välillä aidosti kasvava.

Jos funktion kuvaajalle jollakin välillä piirretyt tangentit ovat laskevia suoria, niin funktio on tällä välillä aidosti vähenevä. Välillä saa olla myös erillisiä kohtia, joissa tangentti on vaakasuora.



Siis pätee:

Jos $f'(x) \leq 0$ kaikissa välin pisteissä ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä, niin funktio on välillä aidosti vähenevä.

ESIMERKKI 1

- a) Tutki, missä funktio $g(x) = -x^3 + 150x^2$ on kasvava ja missä vähenevä.
 b) Kumpi funktion arvoista $g(100,00001)$ ja $g(100,00002)$ on suurempi?
 c) Hahmottele funktion g kuvaaja.

Ratkaisu

- a) Tutkitaan, missä funktion $g(x) = -x^3 + 150x^2$ derivaattafunktion arvot ovat positiivisia ja missä ne ovat negatiivisia.

Derivoidaan funktio g .

$$g'(x) = -3x^2 + 300x$$

Polynomifunktion merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-3x^2 + 300x = 0$$

$$3x(-x + 100) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{tai} \quad -x + 100 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 100$$

Derivaattafunktion merkki voi vaihtua ainoastaan kohdissa $x = 0$ ja $x = 100$.

Laaditaan derivaattafunktion

$g'(x)$ merkkikaavio selvittämällä merkit nollakohtien rajaamilla lukusuoran osaväleillä. Derivaattafunktion merkkikaavion alle merkitään nuolilla derivaatan merkistä päätelty funktion g kulkusuunta (kasvaminen tai väheneminen) kullakin osavälillä. Näin saadaan funktion g *kulkukaavio*.

	0	100
$g'(x)$		
$g(x)$		

Derivaattafunktion merkit voi selvittää niin, että lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi derivaattafunktion $g'(x) = -3x^2 + 300x$ arvo.

$$g'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 300 \cdot (-1) = -303 < 0$$

$$g'(1) = -3 \cdot 1^2 + 300 \cdot 1 = 297 > 0$$

$$g'(200) = -3 \cdot 200^2 + 300 \cdot 200 = -60\,000 < 0$$

$$g'(x) = -3x^2 + 300x$$

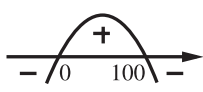
0	100
-	+
↘	↗

$$g(x)$$

Koska tunnetaan derivaattafunktion $g'(x) = -3x^2 + 300x$ kuvaajan muoto, alaspäin aukeava paraabeli, niin derivaatan merkit voidaan perustella myös merkkikaavion viereen piirretyllä paraabelikuviolla.

$$g'(x) = -3x^2 + 300x$$

0	100
-	+
↘	↗



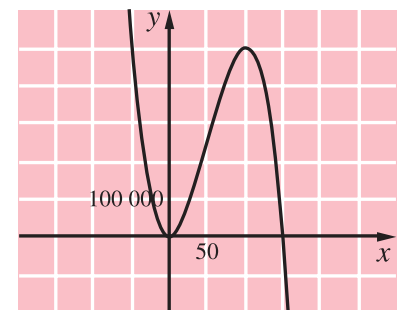
$$g(x)$$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $g(x) = -x^3 + 150x^2$ on aidosti kasvava välillä $[0, 100]$ ja aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[100, \infty[$.

b) Muuttujan arvot 100,00001 ja 100,00002 ovat välillä $[100, \infty[$, jolla funktio g on aidosti vähenevä. Funktion g arvo on suurempi vasemmanpuolisessa kohdassa 100,00001.

c) Funktion g kuvaajan hahmottelemiseksi lasketaan funktion arvo kohdissa 0 ja 100, joissa funktion kulkusuunta vaihtuu, sekä parissa kohdassa kohtien 0 ja 100 välistä ja ulkopuolelta.

x	$g(x) = -x^3 + 150x^2$
-50	$-(-50)^3 + 150 \cdot (-50)^2 = 500\,000$
0	0
50	$-50^3 + 150 \cdot 50^2 = 250\,000$
100	$-100^3 + 150 \cdot 100^2 = 500\,000$
150	$-150^3 + 150 \cdot 150^2 = 0$

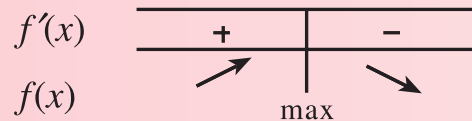


Vastaus

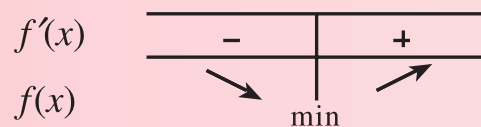
- a) aidosti kasvava välillä $[0, 100]$, aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[100, \infty[$
 b) Arvo $g(100,00001)$ on suurempi.

Funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot

Kohtia, joissa funktio vasemmalta oikealle kuljettaessa vaihtuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi, sanotaan funktion *maksimikohdiksi*. Maksimikohdassa derivaatta on nolla, ja derivaattafunktion merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi.



Kohtia, joissa funktio vasemmalta oikealle kuljettaessa vaihtuu aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi, sanotaan funktion *minimikohdiksi*. Minimikohdassa derivaatta on nolla, ja derivaattafunktion merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi.



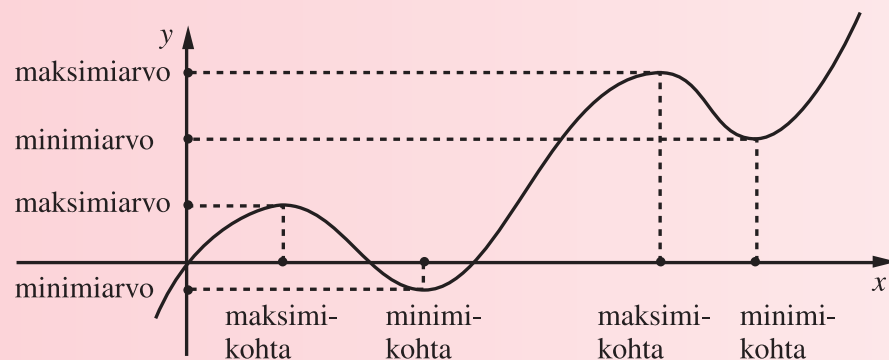
Maksimikohdat ja minimikohdat ovat funktion *ääriarvokohtia*.

Funktion arvot maksimikohdissa ovat funktion *maksimi-arvoja*.

Funktion arvot minimikohdissa ovat funktion *minimi-arvoja*.

Maksimi-arvot ja minimi-arvot ovat funktion *ääriarvoja*.

Funktiolla voi olla useita maksimikohtia ja useita minimikohtia.



Nimitys maksimikohta juontuu siitä, että maksimikohdassa funktio saa suuremman arvon (maksimi-arvo) kuin maksimikohdan läheisyydessä olevissa kohdissa. Vastaavasti nimitys minimikohta juontuu siitä, että minimikohdassa funktio saa pienemmän arvon (minimi-arvo) kuin minimikohdan läheisyydessä olevissa kohdissa.

ESIMERKKI 2

Missä funktio $f(x) = -3x^2 + 48x + 100$ on kasvava ja missä vähenevä? Mitkä ovat funktion ääriarvokohdat?

Ratkaisu

Tapa 1. Derivoituvan funktion kulkua voidaan tutkia laatimalla funktion kulkukaavio.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -6x + 48$$

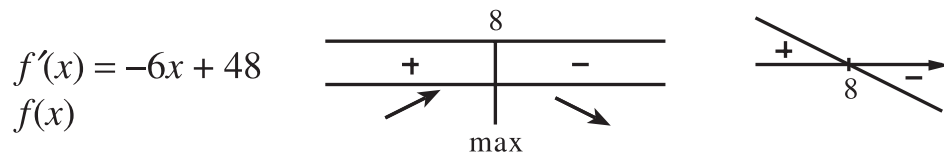
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-6x + 48 = 0$$

$$-6x = -48 \quad | : (-6)$$

$$x = 8$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = -6x + 48$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.*



Kulkukaavion mukaan funktio f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, 8]$ ja aidosti vähenevä välillä $[8, \infty[$.

Kulkukaaviosta ilmenee myös, että kohta $x = 8$ on funktion maksimi-kohta. Vastaava maksimiarvo on

$$f(8) = -3 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 + 100 = 292.$$

* Derivaattafunktion merkit on perusteltu hahmottelemalla derivaattafunktion kuvaaja (laskeva suora). Merkit voidaan perustella myös laskemalla yksi derivaattafunktion arvo molemmilta väleiltä $]-\infty, 8[$ ja $]8, \infty[$.

Tapa 2. Koska funktio $f(x) = -3x^2 + 48x + 100$ on toisen asteen polynomifunktio, sen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion kasvaminen ja väheneminen voidaan selvittää ilman kulkukaaviota, sillä kulkusuunta vaihtuu huipun kohdalla.

Huipun x -koordinaatti on funktion f derivaattafunktion nollakohta.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -6x + 48$$

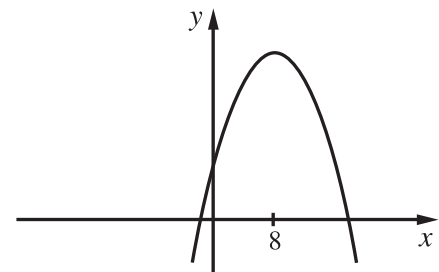
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$-6x + 48 = 0$$

$$-6x = -48 \quad | : (-6)$$

$$x = 8$$

Koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, 8]$ ja aidosti vähenevä välillä $[8, \infty[$.



Kohta $x = 8$ on funktion f maksimikohta. Vastaava maksimiarvo on $f(8) = -3 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 + 100 = 292$.

Vastaus

aidosti kasvava välillä $]-\infty, 8]$ ja aidosti vähenevä välillä $[8, \infty[$,
maksimikohta 8 ja maksimiarvo 292

ESIMERKKI 3

Missä funktio $f(x) = x^4 + 4x^3 - 56x^2 + 1000$ on aidosti kasvava?
Määritä funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot ja hahmottele kuvaaja.

Ratkaisu

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 112x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x^3 + 12x^2 - 112x = 0 \quad \text{Erotetaan yhteinen tekijä } 4x.$$

$$4x(x^2 + 3x - 28) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö.}$$

$$4x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 3x - 28 = 0$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö $x^2 + 3x - 28 = 0$.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 11}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 11}{2} = -7$$

Derivaattafunktion $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 112x$ nollakohdat pienimmästä suurimpaan lueteltuina ovat -7 , 0 ja 4 . Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä. Derivaattafunktion merkkikaavio täydennetään funktion f kulkukaavioksi.

$$f'(-10) = -1680 < 0$$

$$f'(-1) = 120 > 0$$

$$f'(1) = -96 < 0$$

$$f'(10) = 4080 > 0$$

	-7	0	4	
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	min	max	min	

Kulkukaavion mukaan funktio $f(x) = x^4 + 4x^3 - 56x^2 + 1000$ on aidosti kasvava väleillä $[-7, 0]$ ja $[4, \infty[$.

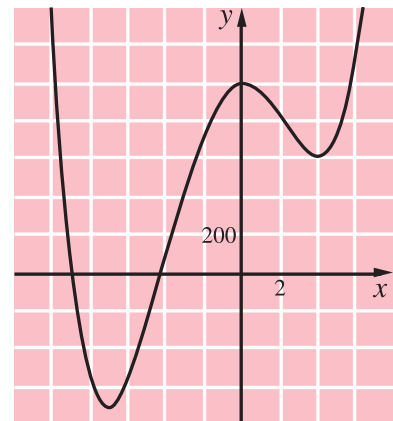
Funktiolla f on minimikohdat -7 ja 4 . Vastavat minimiarvot ovat:

$$f(-7) = (-7)^4 + 4 \cdot (-7)^3 - 56 \cdot (-7)^2 + 1000 = -715$$

$$f(4) = 4^4 + 4 \cdot 4^3 - 56 \cdot 4^2 + 1000 = 616$$

Funktiolla f on maksimikohta 0 . Vastaava maksimiarvo on $f(0) = 1000$.

x	$f(x) = x^4 + 4x^3 - 56x^2 + 1000$
-10	$1\,400$
-7	-715
-4	104
0	$1\,000$
4	616
6	$1\,144$



Vastaus

aidosti kasvava väleillä $[-7, 0]$ ja $[4, \infty[$, minimikohdat -7 ja 4 ja vastaavat minimiarvot -715 ja 616 , maksimikohta 0 ja maksimiarvo $1\,000$

ESIMERKKI 4

- Tutki funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ kulkua.
- Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^3 - 6x^2 + 12x - 3 = 0$ on?

Ratkaisu

- Laaditaan funktion f kulkukaavio.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

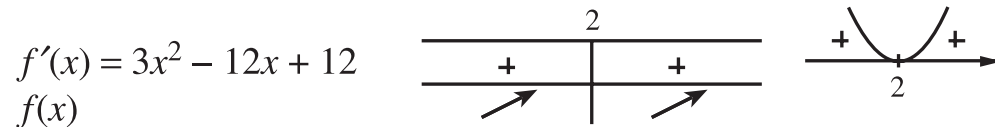
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x + 12 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Kohta $x = 2$ on derivaattafunktion ainoa nollakohta. Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.



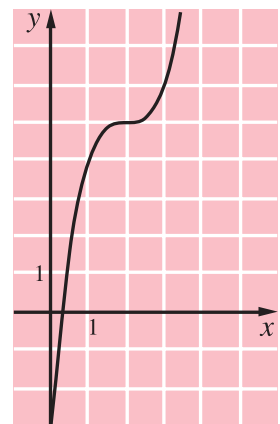
Funktio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ on kaikkialla aidosti kasvava. Funktiolla f ei ole ääriarvokohtia. Kohta 2 on terassikohta.*

b) Yhtälön $x^3 - 6x^2 + 12x - 3 = 0$ juuret ovat funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ nollakohtia.

Funktion f arvot $f(0) = -3$ ja $f(1) = 4$ ovat erimerkkiset. Koska funktio f on jatkuva, sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.

Koska funktio f on kaikkialla aidosti kasvava, sen kuvaaja voi leikata x -akselin ainoastaan kerran.

Yhtälöllä $x^3 - 6x^2 + 12x - 3 = 0$ on yksi juuri.



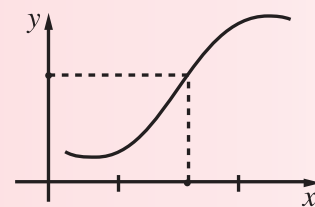
Vastaus

- a) kaikkialla aidosti kasvava
b) yksi juuri

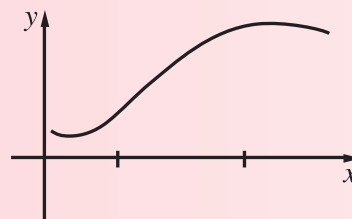
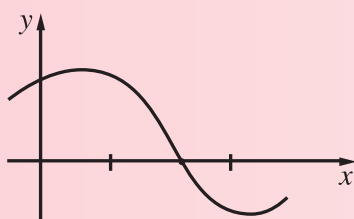
* Olisi voitu myös huomata, että $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$, ja päätellä tästä, että derivaattafunktio f' on kaikkialla epänegatiivinen ja nolla vain kohdassa $x = 2$.

Monotonisuus ja nollakohdat

Jos funktio on jollain välillä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, niin sanotaan, että funktio on tällä välillä *aidosti monotoninen*. Jos funktio on jollain välillä aidosti monotoninen, niin se ei voi saada samaa arvoa välin kahdessa eri kohdassa. Jokaisen arvonsa, jonka funktio tällä välillä saa, se saa vain yhdessä välin kohdassa.



Erityisesti, jos funktio on jollain välillä aidosti monotoninen, niin sillä on tällä välillä enintään yksi nollakohta.



Jos tunnetaan funktion f kulku, voidaan siis tehdä päätelmiä funktion nollakohtien (yhtälön $f(x) = 0$ juurten) lukumäärästä.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

171. a) Missä funktio $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ on kasvava ja missä vähenevä?
b) Päättele a-kohdan tuloksesta, kumpi funktion f arvoista $f(0,00001)$ ja $f(0,00002)$ on suurempi.

172. Missä funktio $f(x) = x^2 - 160x + 100$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot.

173. a) Missä funktio $f(x) = x^2(90 - x)$ on kasvava ja missä vähenevä?
b) Määritä funktion f ääriarvot ja hahmottele kuvaaja.
c) Kumpi funktion f arvoista $f(41 + 1,1 \cdot 10^{-12})$ ja $f(41 + 1,2 \cdot 10^{-12})$ on suurempi?

174. Osoita, että funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 26x + 7$ on kaikkialla aidosti kasvava. Onko funktiolla f terassikohtia?

175. Missä funktio $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä ääriarvokohdat ja ääriarvot. Hahmottele kuvaaja.

176. Missä funktio $g(x) = -x^4 + 8x^3$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä ääriarvokohdat ja ääriarvot. Hahmottele kuvaaja.

177. Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^3 + 300x - 100 = 0$ on? Määritä haarukoimalla juurten likiarvot yhden desimaalin tarkkuudella.

178. Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^5 + x^3 + x - 5 = 0$ on?

179. Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^5 + 1000 = 25x^4$ on? Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välissä juuret sijaitsevat?

180. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3ax + 4$ on kaikkialla aidosti kasvava?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

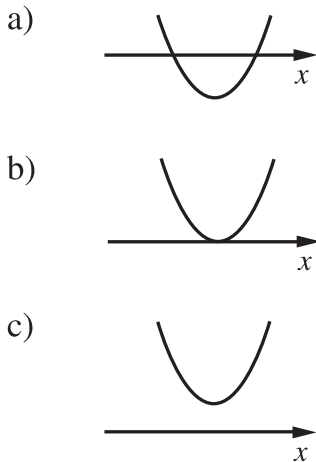
181. Määritä vakio b niin, että funktio $f(x) = -x^2 + bx - 10$ on aidosti kasvava, kun $x \leq 3$, ja aidosti vähenevä, kun $x \geq 3$. Mitkä funktion ääriarvot tällöin ovat?

182. Määritä funktion $f(x) = 48x - x^3$ ääriarvokohdat ja ääriarvot. Hahmottele kuvaaja.

183. Kumpi funktion $f(x) = 12x^3 - 189x^2 - 7\,462\,195$ arvoista on suurempi?
a) $f(9,49999)$ vai $f(9,5)$
b) $f(10,5)$ vai $f(10,50001)$

184. Millä väleillä funktio $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + x + 12$ on aidosti vähenevä?

185. Jos kolmannen asteen polynomifunktion korkeimman asteen termin kerroin on positiivinen, funktion derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Kuviossa ovat kaikki vaihtoehdot, kuinka derivaattafunktion kuvaaja voi sijaita x -akselin suhteen. Hahmottele jokaista tilannetta vastaava kolmannen asteen polynomifunktion kuvaajan tyyppi.



186. Missä funktio $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 14x^2$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion ääriarvot.

187. Millä väleillä funktio $f(x) = 5x^5 - 3x^3 + 1$ on kasvava ja millä vähenevä? Määritä funktion ääriarvokohdat. Onko funktiolla f terassikohtia?

188. Osoita, että funktio

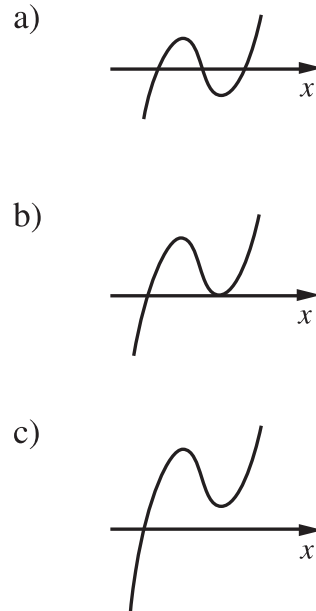
$f(x) = -x^5 - 3x^3 - 7x + 11$ on kaikkialla aidosti vähenevä. Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on?

189. Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^3 - 3x + 5 = 0$ on? Määritä haarukoimalla juurten likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

190. Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^5 - 375x^3 - 3 = 0$ on?

191. Osoita, että luku 1 toteuttaa yhtälön $5x^5 + 12x^3 = 15x^4 + 2$ ja että yhtälöllä ei ole muita juuria.

192. Hahmottele neljännen asteen polynomifunktion kuvaaja, jos funktion derivaattafunktion kuvaaja on



193. Osoita, että muotoa $f(x) = x^3 - ax^2 + a^2x$ oleva funktio on kaikkialla aidosti kasvava, olipa vakiolla a mikä reaaliarvo tahansa.

194. Funktiolla $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ on minimiarvo 2 kohdassa $x = 0$. Kohta $x = -1$ on funktion f maksimikohta. Mikä maksimiarvo $f(-1)$ on?

195. Osoita, että jos a on epänegatiivinen, niin muotoa $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ olevalla neljännen asteen yhtälöllä on enintään kaksi juurta.

Polynomifunktion suurin ja pienin arvo

Ongelma

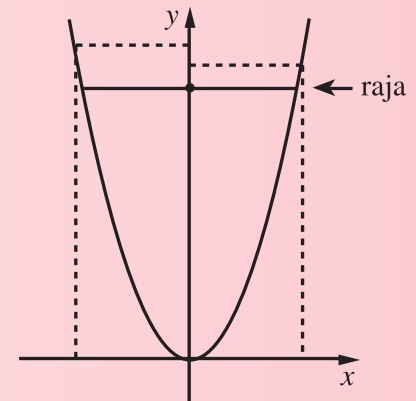
Piirrä graafisella laskimella funktion kuvaaja. Päätele kuvaajasta, onko funktion saamien arvojen joukossa suurin arvo ja pienin arvo.

a) $-\frac{1}{4}x^4$ b) $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ c) x^3 d) $x^3 - 3x^2 + 1$

Parillisen potenssifunktion suurin ja pienin arvo

Kuviossa on parillista astetta olevan potenssifunktion (x^2 , x^4 , x^6 jne.) kuvaajan muoto.

Kun muuttujan x arvot suurenevät, parillista astetta olevan potenssifunktion arvot suurenevät yli kaikki rajojen eli mitä tahansa ennalta asetettua arvoa suuremmiksi. Samoin käy silloin, kun muuttujan arvot pienenevät. Parillisen potenssifunktion arvot suurenevät rajatta, kun muuttujan arvot suurenevät tai pienenevät rajatta.



Siis parillista astetta olevan potenssifunktion saamien arvojen joukossa ei ole suurinta arvoa.

Parillisen potenssifunktion arvo kohdassa 0 on 0 . Funktion kaikki muut arvot ovat positiivisia. Parillisen potenssifunktion pienin arvo on 0 .

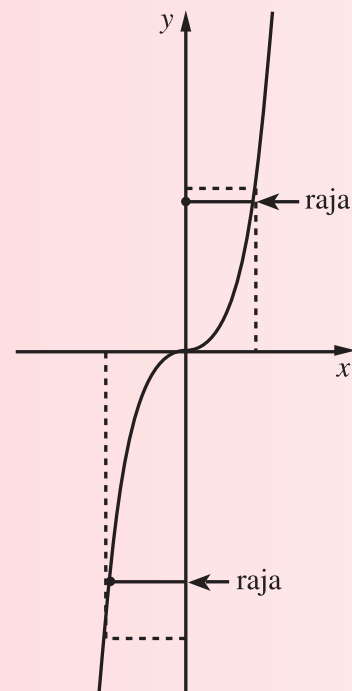
Parittoman potenssifunktion suurin ja pienin arvo

Kuviossa on paritonta astetta olevan potenssifunktion (x , x^3 , x^5 jne.) kuvaajan muoto.

Kun muuttujan x arvot suurenevat rajatta, parittoman potenssifunktion arvot suurenevat rajatta.

Kun muuttujan x arvot pienenevät rajatta, parittoman potenssifunktion arvot pienenevät rajatta.

Siis parittoman potenssifunktion saamien arvojen joukossa ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.



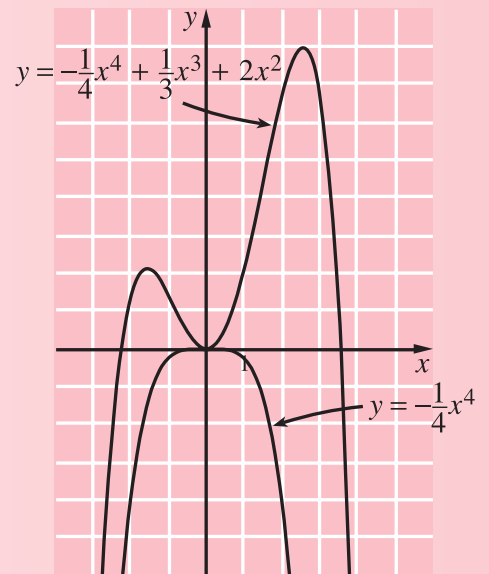
Polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon olemassaolo

Polynomifunktion kuvaaja saattaa ääriarvokohtien lukumäärästä riippuen vaihtaa useamman kerran kulkusuuntaansa. Voidaan kuitenkin osoittaa*, että *polynomifunktion käyttäytyminen lukusuoran äärilaidoilla ja siis suurimman ja pienimmän arvon olemassaolo riippuu ainoastaan funktion lausekkeen korkeimman asteen termistä.*

* Tämä osoitetaan syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

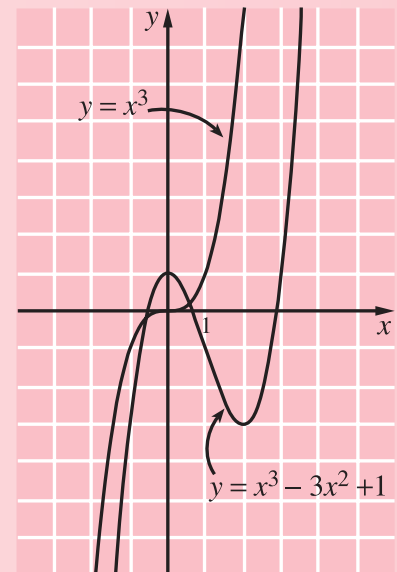
Kun muuttujan x arvot suurenevat tai pienenevät rajatta, niin funktio $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ käyttäytyy kuten funktio $-\frac{1}{4}x^4$, eli funktion arvot pienenevät rajatta.

Funktiolla $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ ei ole pienintä arvoa. Funktiolla on suurin arvo (kuvaajan perusteella noin 8).



Kun muuttujan x arvot suurenevat ja pienenevät rajatta, niin funktio $x^3 - 3x^2 + 1$ käyttäytyy kuten funktio x^3 . Muuttujan arvojen suu-
retessa rajatta funktion $x^3 - 3x^2 + 1$ arvot suurenevat rajatta. Muuttujan arvojen pienetessä rajatta funktion $x^3 - 3x^2 + 1$ arvot pienenevät rajatta.

Funktiolla $x^3 - 3x^2 + 1$ ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.



ESIMERKKI 1

Määritä funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

a) suurin ja pienin arvo b) arvojoukko.

Ratkaisu

a) Funktio $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ on toisen asteen polynomifunktio, joten sen kuvaaja on paraabeli. Paraabeli aukeaa alaspäin, joten funktion suurin arvo on paraabelin huipun y -koordinaatti.

Huipun x -koordinaatti on funktion f derivaattafunktion nollakohta.

Derivoidaan.

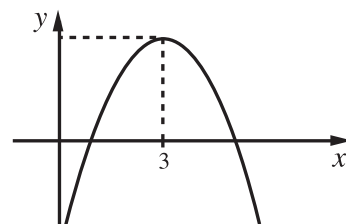
$$f'(x) = -2x + 6$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$-2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$



Suurin arvo on $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$.*

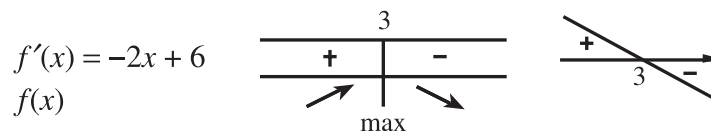
Kun muuttujan x arvot suurenevät tai pienenevät rajatta, niin funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ arvot pienenevät rajatta. Funktiolla f ei ole pienintä arvoa.

b) Funktion *arvojoukko* on funktion kaikkien arvojen muodostama joukko. Koska funktion f suurin arvo on 4, funktion kaikki arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 4. Koska muuttujan x suuretessa tai pienetessä rajatta funktion f arvot pienenevät rajatta, funktion arvojoukkoon kuuluvat kaikki lukua 4 pienemmät luvut. Funktion f arvojoukko on väli $]-\infty, 4]$.

Vastaus

a) Suurin arvo 4, pienintä arvoa ei ole. b) $]-\infty, 4]$

* Toinen tapa päätellä kohta, jossa funktio f saa suurimman arvonsa, on muodostaa derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio ja täydentää se funktion f kulkukaavioksi.



Kulkukaavion mukaan funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa 3.

ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x) = x^3 - 15x^2 + 27x + 50$ suurin ja pienin arvo välillä a) $[-2, \infty[$ b) $[-2, 5]$.

Ratkaisu

a) Funktion $f(x) = x^3 - 15x^2 + 27x + 50$ käyttäytymisen silloin, kun muuttujan arvot suurenevät rajatta, määrää korkeimman asteen termi x^3 . Koska muuttujan arvojen suurenessa rajatta funktion x^3 arvot suurenevät rajatta, myös funktion $f(x)$ arvot suurenevät rajatta. Funktiolla f ei ole suurinta arvoa välillä $[-2, \infty[$.

Pienin arvo välillä $[-2, \infty[$ saadaan selville tutkimalla funktion f kulkua.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 27$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

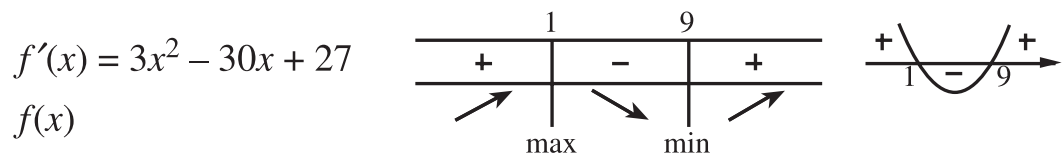
$$3x^2 - 30x + 27 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

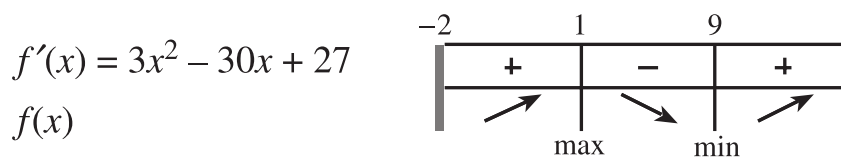
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{10 + 8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{tai} \quad x = \frac{10 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 30x + 27$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.



Rajataan kulkukaavio tutkittavalle välille $[-2, \infty[$.



Kulkukaavion mukaan funktio $f(x) = x^3 - 15x^2 + 27x + 50$ saa välillä $[-2, \infty[$ pienimmän arvon joko minimikohdassa 9 tai välin päätepisteessä -2 .

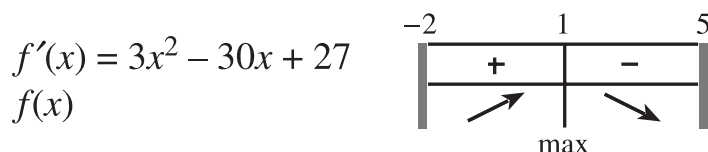
Tutkitaan, kumpi arvoista $f(9)$ ja $f(-2)$ on pienempi.

$$f(9) = 9^3 - 15 \cdot 9^2 + 27 \cdot 9 + 50 = -193$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 15 \cdot (-2)^2 + 27 \cdot (-2) + 50 = -72$$

Arvoista pienempi on $f(9) = -193$. Pienin arvo, jonka funktio f saa välillä $[-2, \infty[$ on -193 .

b) Rajataan funktion f kulkukaavio välille $[-2, 5]$.



Kulkukaavion mukaan funktio $f(x) = x^3 - 15x^2 + 27x + 50$ saa välillä $[-2, 5]$ suurimman arvon kohdassa 1. Suurin arvo on $f(1) = 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 27 \cdot 1 + 50 = 63$.

Pienin arvo on joko $f(-2)$ tai $f(5)$.

$$f(-2) = -72$$

$$f(5) = 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 27 \cdot 5 + 50 = -65$$

Funktion f pienin arvo välillä $[-2, 5]$ on $f(-2) = -72$.

Vastaus

- a) Suurinta arvoa ei ole, pienin arvo on -193 .
 b) Suurin arvo 63, pienin arvo -72 .

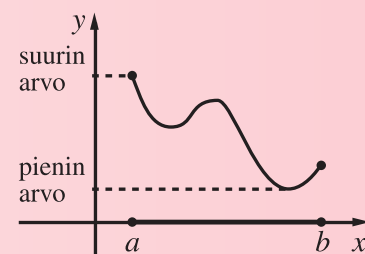
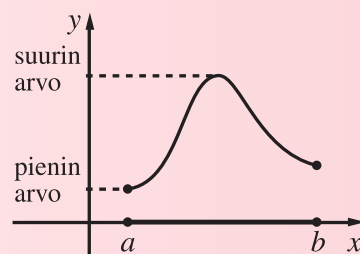
Derivoituvan funktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen – yleispätevä menetelmä

Laaditaan funktion kulkukaavio. Jos tehtävänä on määrittää suurin (pienin) arvo jollain välillä, laadittu kulkukaavio rajataan tälle välille.

Kulkukaaviosta päätellään kohta, jossa funktio saa suurimman (pienimmän) arvon. Mahdollisia kohtia saattaa olla useampia. Tällöin lasketaan funktion arvo jokaisessa mahdollisessa kohdassa. Laskettuja arvoja vertaamalla löydetään suurin (pienin) arvo.

Suljettu väli

Rajoittamattomalla välillä tai välillä, joka ei sisällä päätepisteitään, funktiolla ei välttämättä ole suurinta tai pienintä arvoa. Rajoitetulla välillä, joka sisältää molemmat päätepisteensä eli joka on muotoa $[a, b]$, derivoituvalla funktiolla on aina sekä suurin että pienin arvo. Muotoa $[a, b]$ olevaa väliä kutsutaan *suljetuksi väliksi*.



Ainoat mahdolliset kohdat, joissa derivoituva funktio voi suljetulla välillä $[a, b]$ saada suurimman (ja pienimmän) arvon, ovat välillä $]a, b[$ olevat ääriarvokohdat sekä välin päätepisteet a ja b . Koska kaikki ääriarvokohdat ovat derivaattafunktion nollakohtia*, niin:

Ainoat mahdolliset kohdat, joissa derivoituva funktio voi suljetulla välillä $[a, b]$ saada suurimman (ja pienimmän) arvon, ovat välillä $]a, b[$ olevat derivaattafunktion nollakohdat sekä välin päätepisteet a ja b .

* Kaikki derivaattafunktion nollakohdat eivät välttämättä ole ääriarvokohtia. Tässä on oleellista se, että ääriarvokohdat ovat derivaattafunktion nollakohtien joukossa.

Derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä voidaan siis määrittää seuraavasti.

Suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä – vaihtoehtoinen menetelmä

Kun tehtävänä on määrittää derivoituvan funktion f suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[a, b]$, niin:

1. Derivoidaan funktio f .
2. Määritetään derivaattafunktion f' nollakohdat ja valitaan nollakohdista ne, jotka ovat välin $[a, b]$ sisällä välillä $]a, b[$.
3. Lasketaan funktion arvo välillä $]a, b[$ olevissa derivaattafunktion nollakohdissa sekä välin päätepisteissä a ja b . Lasketuista arvoista suurin on funktion f suurin arvo välillä $[a, b]$. Lasketuista arvoista pienin on funktion f pienin arvo välillä $[a, b]$.

ESIMERKKI 3

Missä kohdassa välillä $[2, 3]$ funktio $f(x) = 12x^2 - x^4$ saa pienimmän arvon?

Ratkaisu

Tapa 1. Derivoituva funktio $f(x) = 12x^2 - x^4$ saa suljetulla välillä $[2, 3]$ pienimmän arvon joko välillä $]2, 3[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 24x - 4x^3$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$24x - 4x^3 = 0$$

$$4x(6 - x^2) = 0$$

$$4x = 0 \text{ tai } 6 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 = 6$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \sqrt{6} \approx 2,4 \text{ tai } x = -\sqrt{6} \approx -2,4$$

Välillä $]2, 3[$ on derivaattafunktion nollakohta $\sqrt{6}$.

Lasketaan funktion $f(x) = 12x^2 - x^4$ arvo $f(\sqrt{6})$.

$$f(\sqrt{6}) = 12 \cdot (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^4 = 12 \cdot 6 - 36 = 36$$

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä 2 ja 3.

$$f(2) = 12 \cdot 2^2 - 2^4 = 32$$

$$f(3) = 12 \cdot 3^2 - 3^4 = 27$$

Lasketuista arvoista pienin on arvo $f(3)$. Funktio f saa välillä $[2, 3]$ pienimmän arvon välin päätepisteessä 3.

Tapa 2. Laaditaan funktion f kulkukaavio.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 24x - 4x^3$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$24x - 4x^3 = 0$$

$$4x(6 - x^2) = 0$$

$$4x = 0 \text{ tai } 6 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 = 6$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \sqrt{6} \approx 2,4 \text{ tai } x = -\sqrt{6} \approx -2,4$$

Derivaatan nollakohdat pienimmästä suurimpaan ovat $-\sqrt{6}$, 0 ja $\sqrt{6}$.

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = 24x - 4x^3$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.

$$f'(-3) = 36 > 0$$

$$f'(-1) = -20 < 0$$

$$f'(1) = 20 > 0$$

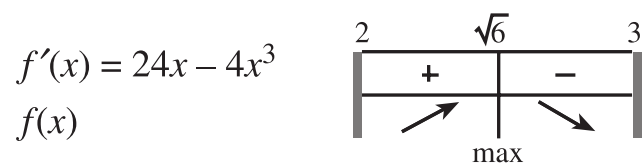
$$f'(3) = -36 < 0$$

$$f'(x) = 24x - 4x^3$$

$$f(x)$$

	$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		
	+		-		+		-
	↗		↘		↗		↘
		max		min		max	

Rajataan kulkukaavio välille $[2, 3]$.



Kulkukaavion mukaan funktio $f(x) = 12x^2 - x^4$ saa välillä $[2, 3]$ pienimmän arvonsa välin jommassakummassa päätepisteessä. Lasketaan arvot $f(2)$ ja $f(3)$.

$$f(2) = 12 \cdot 2^2 - 2^4 = 32$$

$$f(3) = 12 \cdot 3^2 - 3^4 = 27$$

Arvoista pienempi on $f(3)$. Funktio f saa välillä $[2, 3]$ pienimmän arvon päätepisteessä 3.

Vastaus

kohdassa 3

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

196. Onko funktiolla suurin arvo tai pienin arvo?

- a) $\frac{1}{6}x^3$ b) $-3x^4$
 c) $-\frac{1}{5}x^5 + 8x^4 + 11x$ d) $x^6 - 7x^5 + 9$

197. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 8x + 6$
 a) suurin arvo b) pienin arvo c) arvojoukko.

198. Mikä on suurin arvo, jonka funktio $f(x) = 6x - x^2$ saa välillä a) $]-\infty, 2]$
 b) $]-\infty, 5]$?

199. Kuviossa on erään polynomifunktion f kulkukaavio. Rajaa kulkukaavio välille
 a) $[0, \infty[$ b) $[3, \infty[$ c) $[2, 7]$ d) $[0, 7]$
 ja päätele, missä kohdassa funktio f saa kyseisellä välillä suurimman arvon ja missä kohdassa pienimmän arvon.

	1	5	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

200. Mikä on pienin arvo, jonka funktio $f(x) = x^3 - 120x^2$ saa välillä
 a) $[-50, \infty[$ b) $[-30, \infty[$?

201. Mikä on funktion $f(x) = -x^3 - 2x + 8$ pienin arvo välillä $]-\infty, 1]$?

202. a) Määritä funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 - 80x^2$ pienin arvo ja arvojoukko.
 b) Perustele a-kohdan nojalla, että kaikilla muuttujan x arvoilla on $x^4 - 4x^3 - 80x^2 > -3\,075$.

203. Missä suljetun välin $[1, 4]$ kohdassa funktio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 17$ saa pienimmän arvon?

204. Määritä funktion $f(x) = 12x^3 - x^4$ suurin ja pienin arvo välillä
 a) $[-5, 13]$ b) $[-5, 8]$.

205. Määritä vakio c niin, että funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$ suurin arvo välillä $[0, 2]$ on 7.

206. Osoita, että $x^3 + x^2 \geq x - \frac{5}{27}$ kaikilla muuttujan x positiivisilla arvoilla.

207. Osoita, että funktio $f(x) = x^3 + x^2 + x$ on kaikkialla aidosti kasvava. Minkä muuttujan arvon kohdalla funktion f arvot kasvavat hitaimmin (eli kuvaaja nousee loivimmin)?
 (Ohje: Tehtävässä joudutaan tutkimaan funktion f derivaattafunktion derivaattaa. Derivaattafunktion derivaattaa kohdassa a kutsutaan funktion f toiseksi derivaataksi ja sitä merkitään $f''(a)$.)

208. Luvusta x vähennetään luvun x neliö. Millä x :n arvolla erotuksen arvo on suurin, eli mikä luku on eniten neliötään suurempi?

209. Mikä positiivinen luku on eniten kuutiotaan suurempi?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

210. Määritä funktion $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ suurin arvo välillä a) $[0, \infty[$ b) $[2, \infty[$.

211. Lukuun lisätään saman luvun neliö. Mikä on summan pienin mahdollinen arvo?

212. Mikä on pienin arvo, jonka funktio

$$f(x) = -x^3 + 75x + 100 \text{ saa välillä}$$

- a) $]-\infty, 4]$ b) $]-\infty, 11]$?

213. Väliä, joka ei sisällä kumpaakaan päätepistettä, kutsutaan *avoimeksi väliksi*. Väliä, joka sisältää vain toisen päätepisteensä, kutsutaan *puoliavoimeksi väliksi*. Mikä on suurin arvo, jonka funktio x^2 saa

- a) avoimella välillä $]-2, 3[$
 b) puoliavoimella välillä $[-2, 3[$
 c) puoliavoimella välillä $]-2, 3]$?

214. Mikä on suurin ja mikä on pienin arvo, jonka funktio $f(x) = x^2 + 4x + 3$ saa välillä

- a) $[-3, 0]$ b) $[-1, 2]$?

215. Missä kohdassa välillä $[0, 100]$ funktio $f(x) = x^2(100 - x)$ saa suurimman arvon?

216. Määritä funktion $f(x) = x(2x^2 - 1)$ suurin ja pienin arvo välillä $[\frac{1}{2}, 1]$.

217. Mikä on funktion $g(x) = -8x^4 + 4x^3 + x^2$

- a) suurin arvo b) arvojoukko?

218. Osoita, että kaikilla välillä $[-0,25; 0,25]$ olevilla muuttujan x arvoilla on $-0,0032 \leq 15x^5 - x^3 \leq 0,0032$.

219. Osoita, että luvun neliön ja neljänneksen potenssin keskiarvo on aina vähintään yhtä suuri kuin saman luvun kuutio.

220. Millä välillä funktio

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ on vähenevä? Minkä muuttujan arvon kohdalla funktion f arvot pienenevät nopeimmin (eli kuvaaja laskee jyrkimmin)? Katso tehtävän 207 ohjetta.

221. Kun 1 000 yksilön suuruinen hyönteiskanta tuodaan tiettyihin kasvuoloihin, kannan suuruus lähiviikkoina voidaan ennustaa likimain käyttäen funktiota $f(t) = -10t^3 + 120t^2 + 1000$, missä t on tuontihetkestä kulunut aika viikkoina.

- a) Milloin tämän matemaattisen mallin mukaan hyönteisiä on eniten? Kuinka paljon hyönteisiä silloin on?
 b) Kuinka monen viikon kuluttua hyönteisten lukumäärä lisääntyy nopeimmin? Kuinka nopeaa lisääntyminen silloin on?

222. Mikä on suurin arvo ja mikä on pienin arvo, jonka funktio $|x^3 + 5x^2 + 7x - 6|$ saa välillä $[-2, 1]$?

223. Suorat $y = x$, $y = -x$ ja $x = 3$ rajaavat kolmion. Mikä on suurin ja mikä on pienin arvo, jonka lauseke $x^2 - xy - 2x + 6y$ saa kolmion sivuilla?

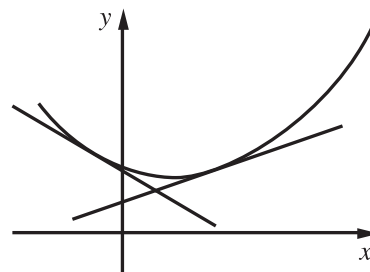
224. Missä ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ pisteessä lausekkeen $x^2(1 - x - y^2)$ arvo on a) suurin
 b) pienin?

225. Määritä funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \text{ pienin arvo.}$$

226. Funktion f sanotaan olevan *kahdesti derivoituva kohdassa a* , jos sen derivaattafunktiolla f' on derivaatta kohdassa a . Funktion f' derivaatta kohdassa a merkitään $f''(a)$.

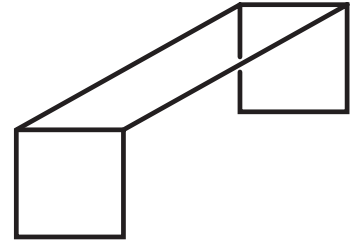
Osoita: Jos funktio f on kaikkialla kahdesti derivoituva ja $f''(x) > 0$ kaikilla x , niin funktion f kuvaaja on jokaisen tangenttinsa yläpuolella. Kuvaajan sanotaan tällöin olevan *alaspäin kupera*.



Sovelluksia

ESIMERKKI 1

Vajarakennukselle, jonka päädyt ovat neliöitä, rakennetaan kuvion mukainen kehikko teräsputkesta. Putkea on käytettävissä 36 metriä. Määritä vajan mitat niin, että vajan tilavuus on mahdollisimman suuri.

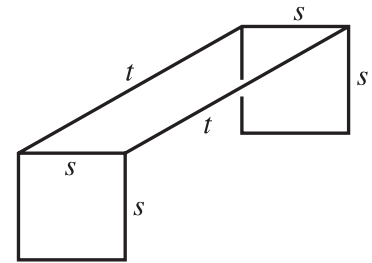


Ratkaisu

Ilmaistaan vajan tilavuus yhden muuttujan funktiona.

Merkitään päädyn leveyttä ja korkeutta metreinä s ja vajan pituutta t . Vajan tilavuus on päätyneliön pinta-alan ja vajan pituuden tulo:

$$V = s^2 t.$$



Käytettävissä olevan putken määrä antaa yhteyden muuttujien s ja t välille.

Päätyihin kuluva putken määrä on yhteensä $8s$ ja pituussuuntaan tarvittavan putken määrä $2t$. Koska putkea on yhteensä 36 metriä, niin

$$8s + 2t = 36.$$

Valitaan tilavuusfunktion muuttujaksi s . Ratkaistaan edellisestä yhtälöstä t .

$$8s + 2t = 36$$

$$2t = 36 - 8s \quad | : 2$$

$$t = 18 - 4s$$

Koska $V = s^2t$, vajan tilavuus yhden muuttujan s funktiona on*

$$V(s) = s^2(18 - 4s).$$

Funktion $V(s)$ määrittelyvälin päätepisteet määräytyvät ääritapauksista:

Kaikki putki käytetään pituussuunnassa, jolloin $s = 0$.

Kaikki putki käytetään pätyihin ($t = 0$), jolloin:

$$\begin{aligned} 8s &= 36 \\ s &= 4,5 \end{aligned}$$

Kun otetaan mukaan ääritapaukset, funktion $V(s)$ määrittelyjoukoksi tulee suljettu väli $[0; 4,5]$.** Määritetään tämän välin kohta, jossa funktion $V(s)$ arvo on suurin.

Funktio $V(s) = s^2(18 - 4s)$ saa välillä $[0; 4,5]$ suurimman arvon joko välillä $]0; 4,5[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä. (Toinen tapa löytää kohta, jossa funktio saa suurimman arvon, on laatia funktion $V(s)$ kulkukaavio.)

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} V(s) &= s^2(18 - 4s) = 18s^2 - 4s^3 \\ V'(s) &= 18 \cdot 2s - 4 \cdot 3s^2 = 36s - 12s^2 \end{aligned}$$

* Tilavuusfunktion muuttujaksi olisi voitu myös valita t :

$$\begin{aligned} 8s + 2t &= 36 \\ 8s &= 36 - 2t & | : 8 \\ s &= \frac{9}{2} - \frac{1}{4}t \end{aligned}$$

Vajan tilavuus muuttujan t funktiona on $V(t) = (\frac{9}{2} - \frac{1}{4}t)^2t$.

Kun muuttujaksi valittiin s , tilavuudelle saatiin yksinkertaisempi lauseke. Usein kannattaa kokeilla, mikä muuttujan valinta johtaa yksinkertaisimpaan funktioon.

** Ääritapaukset ovat mahdollisia vaikkakin vajoina järjettömiä. Kun määrittelyjoukkoon otettiin mukaan ääritapaukset, määrittelyjoukoksi saatiin suljettu väli. Kohta, jossa funktio saa suurimman arvon, voidaan nyt määrittää suljetun välin menetelmällä. Jos ääritapauksia ei oteta määrittelyjoukkoon, kyseinen kohta on määritettävä kulkukaavion avulla.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$36s - 12s^2 = 0$$

$$s(36 - 12s) = 0$$

$$s = 0 \text{ tai } 36 - 12s = 0$$

$$s = 0 \text{ tai } 12s = 36$$

$$s = 0 \text{ tai } s = 3$$

Välillä $]0; 4,5[$ on derivaattafunktion nollakohta 3.

Lasketaan funktion $V(s) = s^2(18 - 4s)$ arvo $V(3)$.

$$V(3) = 3^2 \cdot (18 - 4 \cdot 3) = 54$$

Lasketaan funktion $V(s)$ arvo välin $[0; 4,5]$ päätepisteissä 0 ja 4,5.

$$V(0) = 0^2 \cdot (18 - 4 \cdot 0) = 0$$

$$V(4,5) = 4,5^2 \cdot (18 - 4 \cdot 4,5) = 4,5^2 \cdot 0 = 0$$

Lasketuista arvoista suurin on arvo $V(3)$. Funktio $V(s)$ saa välillä $[0; 4,5]$ suurimman arvon muuttujan s arvolla 3.

Kun vajan päätyneliön sivu $s = 3$, niin vajan pituus on
 $t = 18 - 4s = 18 - 4 \cdot 3 = 6$.

Tilavuus on suurin, kun vajan päätyneliön sivun pituus on 3 m ja vajan pituus 6 m.

Vastaus

pätyneliön sivu 3 m ja vajan pituus 6 m

ESIMERKKI 2

Kauppias arvioi, että t-paitojen hinnan korottaminen yhdellä eurolla johtaa aina paitojen viikkomyynnin pienenemiseen viidellä kappaaleella. Kun paidan hinta oli 30 euroa, viikossa myytiin 100 paitaa. Mikä myyntihinnan tulee olla, jotta paitojen viikkomyynnin arvo olisi mahdollisimman suuri? Kuinka suuri myynnin arvo tällöin on?

Ratkaisu

On ratkaistava, kuinka hintaa 30 euroa tulee muuttaa, jotta viikkomyynnin arvo olisi mahdollisimman suuri. Valitaan muuttujaksi x hinnan korotuksen suuruus euroina. Jos hintaa 30 euroa korotetaan x euroa, paidan hinnaksi tulee $30 + x$ euroa.

Jokainen euro, jolla hintaa on korotettu, vähentää myytyjen paitojen lukumäärää viidellä. Jos korotuksen suuruus on x euroa, myynti vähenee $5x$ kappaletta, ja viikkomyynnin suuruudeksi tulee $100 - 5x$ paitaa.

Myynnin arvo on myytyjen paitojen lukumäärän ja paidan hinnan tulo. Myynnin arvon ilmaisee funktio

$$f(x) = (100 - 5x)(30 + x).$$

Koska paidan hinta $30 + x$ ei voi olla negatiivinen, tulee olla $30 + x \geq 0$ eli $x \geq -30$.

Koska myytyjen paitojen määrä ei voi olla negatiivinen, tulee olla $100 - 5x \geq 0$ eli $x \leq 20$.

Funktion f määrittelyväli on suljettu väli $[-30, 20]$. Määritetään se välin kohta, jossa funktio f saa suurimman arvon. Suljetulla välillä $[-30, 20]$ funktio f saa suurimman arvon joko välillä $] -30, 20[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.*

* Tarjolla on myös kaksi muuta tapaa määrittää välin $[-30, 20]$ kohta, jossa funktio f saa suurimman arvon. Yksi tapa on laatia funktion f kulkukaavio. Toinen tapa on vedota funktion f kuvaajan muotoon. Koska funktio f on toisen asteen polynomi-funktio, sen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Kohta, jossa funktio f saa välillä $[-30, 20]$ suurimman arvonsa, on kuvaajaparaabelin huipun x -koordinaatti edellyttäen, että x -koordinaatti on välillä $[-30, 20]$.

Derivoidaan.

$$f(x) = (100 - 5x)(30 + x) = -5x^2 - 50x + 3000$$

$$f'(x) = -10x - 50$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$-10x - 50 = 0$$

$$-10x = 50$$

$$x = -5$$

Derivaattafunktion nollakohta -5 on välillä $] -30, 20[$.

Lasketaan funktion $f(x) = (100 - 5x)(30 + x)$ arvo $f(-5)$.

$$f(-5) = 125 \cdot 25 = 3125$$

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä -30 ja 20 .

$$f(-30) = 250 \cdot 0 = 0$$

$$f(20) = 0 \cdot 50 = 0$$

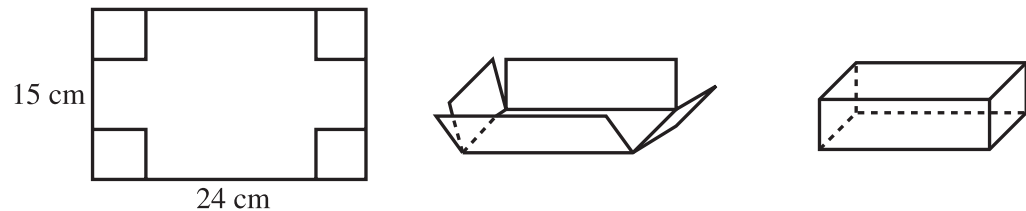
Funktio f saa suurimman arvon kohdassa $x = -5$. Myynnin arvo on suurin, jos hintaa alennetaan 5 euroa. Myyntihinta on tällöin 25 euroa ja myynnin arvo 3 125 euroa.

Vastaus

hinta 25 euroa, myynnin arvo 3 125 euroa

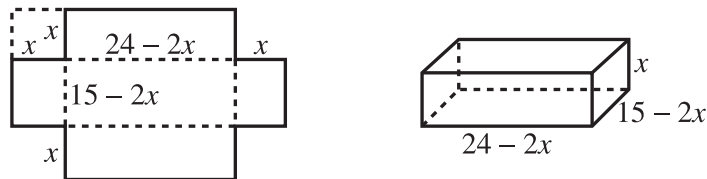
ESIMERKKI 3

Suorakulmion muotoisen pahvilevyn sivujen pituudet ovat 15 cm ja 24 cm. Levyn jokaisesta nurkasta leikataan pois yhtä suuri neliö ja levystä tehdään laatikko taittamalla reunat ylös. Halutaan, että laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri. Kuinka suuri pois leikattavan neliön sivun pituuden tulee olla?



Ratkaisu

Muuttujaksi x valitaan pois leikatun neliön sivun pituus senttimetreinä.



Laatikon pohja muodostuu keskelle jäävästä suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet ovat $15 - 2x$ ja $24 - 2x$. Laatikon korkeus on x .

Laatikon tilavuus muuttujan x funktiona on

$$V(x) = x(15 - 2x)(24 - 2x).$$

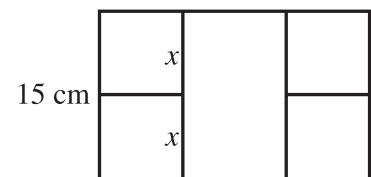
Funktion V määrittelyvälin rajat määräytyvät ääritapauksista:

Leikatun neliön sivun pituus on 0: $x = 0$

Leikattu neliö ulottuu lyhyemmän sivun keskikohtaan:

$$2x = 15$$

$$x = 7,5$$



Kun otetaan mukaan ääritapaukset 0 ja 7,5, funktion $V(x)$ määrittelyjoukoksi tulee suljettu väli $[0; 7,5]$.

Funktio $V(x)$ saa suljetulla välillä $[0; 7,5]$ suurimman arvon välillä $]0; 7,5[$ olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} V(x) &= x(15 - 2x)(24 - 2x) = x(360 - 78x + 4x^2) \\ &= 360x - 78x^2 + 4x^3 = 4x^3 - 78x^2 + 360x. \end{aligned}$$

$$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$12x^2 - 156x + 360 = 0 \quad | : 4$$

$$3x^2 - 39x + 90 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{13 + 7}{2} = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{tai} \quad x = \frac{13 - 7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Välillä $]0; 7,5[$ on derivaattafunktion nollakohta 3.

Lasketaan funktion $V(x) = x(15 - 2x)(24 - 2x)$ arvo $V(3)$.

$$V(3) = 3(15 - 2 \cdot 3)(24 - 2 \cdot 3) = 3 \cdot 9 \cdot 18 = 486$$

Lasketaan funktion $V(x)$ arvo välin päätepisteissä 0 ja 7,5.

$$V(0) = 0 \cdot (15 - 2 \cdot 0)(24 - 2 \cdot 0) = 0$$

$$V(7,5) = 7,5 \cdot (15 - 2 \cdot 7,5)(24 - 2 \cdot 7,5) = 0$$

Lasketuista arvoista suurin on arvo $V(3)$.

Funktio $V(x)$ saa suurimman arvon muuttujan arvolla 3.

Neliön sivun pituuden tulee olla 3 cm.

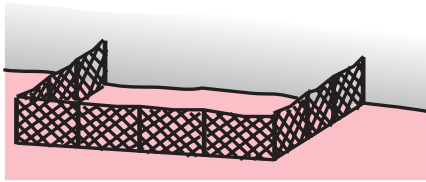
Vastaus

3 cm

TEHTÄVIÄ

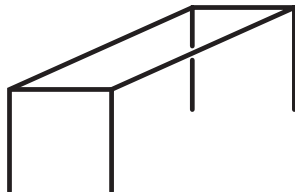
SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

227. Joen rantaan rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus. Aitauksen kolmeen sivuun on käytettävissä 36 metriä verkkoaitaa. Kuinka aitauksen mitat on valittava, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?



228. Suorakulmion muotoisen alueen aitaamiseen on käytettävissä 60 metriä aita. Kuinka aitauksen mitat on valittava, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri? Kuinka suuri aitauksen pinta-ala tällöin on?

229. Vajarakennukselle, jonka päädyt ovat neliöitä, rakennetaan kuvion muotoinen kehikko teräsputkesta. Putkea on käytettävissä 36 metriä. Määritä vajan mitat niin, että vajan
a) tilavuus b) lattiapinta-ala on mahdollisimman suuri.



230. Rautalangan pituus on 120 cm. Siitä taitutetaan suorakulmion muotoinen kehikko, jonka yksi sivu on kaksinkertaisesta rautalangasta. Kuinka kehikon mitat on valittava, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

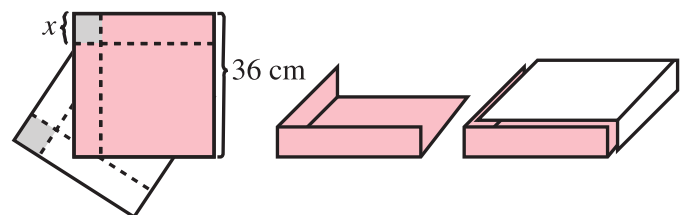
231. Kun kauppias asetti naudan sisäfileen hinnaksi 34 euroa kilogrammalta, hän sai päivässä kaupaksi 120 kg sisäfilettä. Hän arvioi, että jokainen euron korotus kilohinnassa vähentää päivämyyntiä 15 kg.

a) Kuinka suureksi kauppiaan tulee asettaa sisäfileen kilohinta, jotta myynnin kokonaisarvo olisi mahdollisimman suuri?

b) Kauppias maksaa lihatukulle sisäfileestä 20 euroa kilogrammalta. Kuinka suureksi hänen tulee asettaa fileen kilohinta, jotta hän saisi myynnistä mahdollisimman paljon voittoa?

232. Jos painokoneen käyntiä nopeutetaan, niin tuotantokatkokset lisääntyvät. Kun kone oli säädetty painamaan 5 000 arkkia tunnissa, se toimi 20 tuntia vuorokaudessa. Arvioidaan, että jokainen sadan arkin lisäys painonopeudessa vähentää koneen toiminta-aikaa 15 minuutilla. Mille nopeudelle kone tulee säätää, jotta vuorokaudessa painettujen arkkien määrä olisi mahdollisimman suuri? Kuinka suuri painettujen arkkien määrä tällöin on?

233. Kahden yhtä suuren neliön muotoisen pahviarkin yhdestä nurkasta leikataan keskenään yhtä suuret neliöt ja arkeista taitetaan rasian pohja ja kansi. Arkkien sivun pituus on 36 cm. Kuinka suuri pois leikattavan neliön sivun pituuden tulee olla, jotta rasian tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



234. Lentoyhtiöt noudattavat käsimatkatavararan suhteen niin sanottua 115 senttimetrin sääntöä: Käsimatkatavaraksi hyväksytään suorakulmaisen särmiön muotoinen esine, jonka pituuden, leveyden ja korkeuden summa ei ylitä 115 senttimetriä. Määritä millimetrin tarkkuudella mitat mahdollisimman tilavalle käsimatkatavaraksi kelpaavalle laukulle, jonka pituus on kaksi kertaa niin suuri kuin leveys.

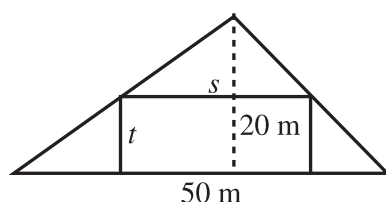
235. Suoran ympyrälierön muotoisen astian pohjan halkaisija on 20 cm. Astian korkeus on yli 20 cm. Astian pohjalle asetetaan pallo ja astiaan kaadetaan vettä, kunnes pallo juuri ja juuri peittyy. Minkä kokoisen pallon peittäminen vaatii eniten vettä? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

236. Suorakulmion yksi kärki on origossa, kaksi sivua positiivisilla koordinaattiakseleilla ja yksi kärki suoralla $y = -2x + 6$.

- Mikä suorakulmion pinta-ala on, jos origosta alkavan x -akselilla olevan sivun toinen päätepiste on $(x, 0)$?
- Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

237. Suorakulmio, jonka piiri on 12, pyörittää yhden sivunsa ympäri. Mikä on muodostuvan suoran ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus?

238. Peltö on muodoltaan kolmio, jonka kanta on 50 metriä ja korkeus 20 metriä. Pellosta erotetaan kuvion mukaisesti suorakulmion muotoinen tontti. Määritä tontin sivujen pituudet s ja t niin, että tontin pinta-ala on mahdollisimman suuri.



239. Suoran ympyräkartion korkeus on 8 ja pohjaympyrän säde 4. Kartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla. Mikä on lieriön suurin mahdollinen tilavuus?

240. Tekstinkäsittelijä on todennut, että kirjoitettaessa tulevien virhelyöntien lukumäärä on suoraan verrannollinen kirjoitusnopeuden neliöön. Nopeudella 100 merkkiä minuutissa virhelyöntejä tulee 10.

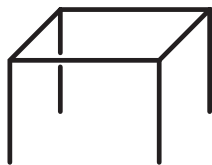
- Mikä on virhelyöntien lukumäärä, kun kirjoitusnopeus on x merkkiä minuutissa?
- Millä nopeudella tekstinkäsittelijä tekee minuutissa eniten virheettömiä lyöntejä? Kuinka monta virheetöntä lyöntiä hän silloin tekee?

241. Käytettävissä on 160 cm rautalankaa. Rautalangasta on tehtävä suoran ympyrälieriön muotoisen lampunvarjostimen pohjaympyrät ja neljä pohjia yhdistävää pystytukea. Suunnittele lampunvarjostimen mitat (pohjaympyrän halkaisija ja korkeus) niin, että varjostimen tilavuus on mahdollisimman suuri. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

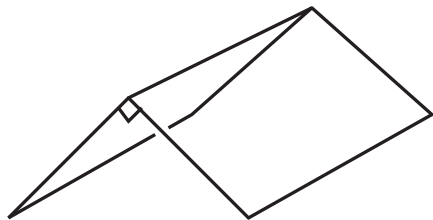
SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

242. Joen varteen aidataan kolmelta sivulta suorakulmion muotoinen alue, joka jaetaan vielä kahdella jokea vastaan kohtisuoralla väliaidalla kolmeen osaan. Aitaa on käytettävissä kaikkiaan 120 metriä. Kuinka aitauksen mitat on valittava, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

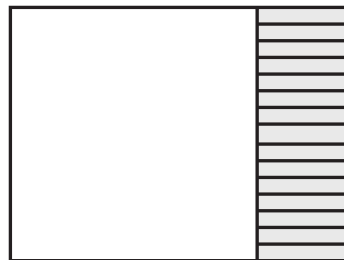
243. Katoksen jalat tehdään parrusta, joka maksaa 7,5 €/m, ja neliön muotoisen katon kehikko lankusta, joka maksaa 5 €/m. Puutavaran hankkimiseen on varattu 180 euroa. Määritä katoksen mitat niin, että sen tilavuus on mahdollisimman suuri.



244. Kasvihuoneelle, jonka päädyt ovat tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita, rakennetaan kuvan mukainen kehikko teräsputkesta. Putkea on käytettävissä 36 metriä. Määritä päätykolmion kylki ja kasvihuoneen pituus niin, että kasvihuoneen a) tilavuus b) kattopinta-ala on mahdollisimman suuri.



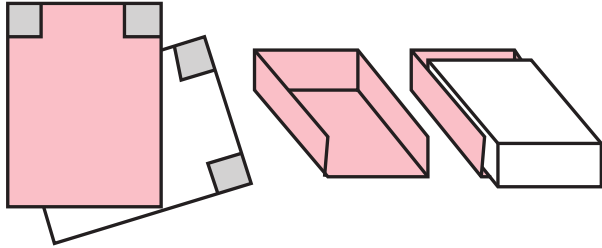
245. Ikkuna-aukon ympäröimiseksi on rakennusmääräyksissä määrätty 360 cm. Aukon reunaan tulee 30 cm:n levyinen koko aukon korkeinen säleiköllä peitetty tuuletusikkuna. Kuinka ikkuna-aukon mitat on valittava, jotta ikkunan valoa läpäisevän osan pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?



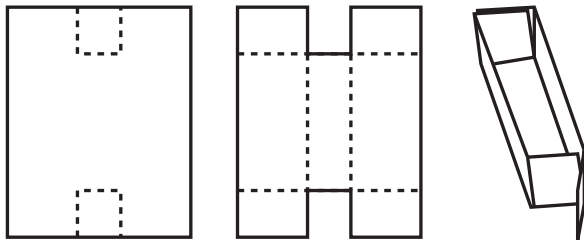
246. Merialueella kalastaa 80 venekuntaa. Yhden venekunnan keskimääräinen saalis on 30 tonnia vuodessa. Uusia kalastuslupia myönnettäessä arvioidaan, että jokainen uusi venekunta vähentää keskimääräistä kalansaalisia 0,2 tonnia. Kuinka monta uutta lupaa tulee myöntää, jos halutaan, että kokonaiskalansaalis on mahdollisimman suuri? Mikä yhden venekunnan keskimääräinen kalansaalis tällöin on?

247. Kamelinajaja kauppa vettä autiomaassa karavaanin tien varrella. Lähtiessään keitaalta hän ottaa mukaansa 100 litraa vettä. Kulkiessaan autiomaassa hän tarvitsee itse joka kilometrillä, myös keitaalle palatessaan, 0,1 litraa vettä. Veden hinta on 20 rahaa litralta, ja jokainen kilometri keitaasta poispäin nostaa hintaa yhdellä rahalla. Kuinka kaukana keitaalta hänen kannattaa myydä vesi, jotta hän saisi mahdollisimman suuret tulot ja pystyisi vielä palaamaan keitaalle? Kuinka suuret hänen tulonsa silloin ovat?

248. Pahviarkkien mitat ovat $24\text{ cm} \times 18\text{ cm}$. Kummankin arkin lyhyemmän sivun nurkista leikataan pois yhtä suuret neliöt ja arkeista taiteetaan suorakulmaisen särmiön muotoisen rasian pohja ja kansi. Rasian tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi. Kuinka pitkä pois leikattavan neliön sivun tulee olla?



249. Suorakulmion muotoisen pahviarkin mitat ovat $24\text{ cm} \times 30\text{ cm}$. Arkin lyhyempien sivujen keskeltä leikataan pois samankokoiset neliöt, ja arkki taitetaan ja liimataan ylhäältä avoimeksi laatikoksi. Kuinka pitkä poisleikattavan neliön sivun tulee olla, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



250. Suorakulmaisen särmiön muotoisen astian pohja on neliö, jonka sivun pituus on $10,0\text{ cm}$. Astian korkeus on suurempi kuin pohjasärmän pituus. Kuinka paljon nestettä pitää astiassa vähintään olla, jotta neste riittäisi peittämään minä tahansa astian pohjalle asetetun pallon? Anna vastaus litroina millilitran tarkkuudella.

251. Suorakulmion kaksi kärkeä on x -akselilla ja kaksi kärkeä paraabelin $y = 4 - x^2$ x -akselin yläpuolisella kaarella.

- Mikä suorakulmion pinta-ala on, jos positiivisella x -akselilla oleva kärkipiste on $(x, 0)$?
- Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?
- Kun paraabeli pyörittää akselinsa ympäri, suorakulmio piirtää avaruuteen suoran ympyrälieriön. Mikä näin muodostuvan ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus on?

252. Tukki on suoran ympyräkartion muotoinen. Tukin pituus on 24 metriä ja tyven läpimita $0,96$ metriä. Tukista halutaan veistää suoran ympyrälieriön muotoinen pölkky, jonka tilavuus on mahdollisimman suuri. Kuinka pitkä ja kuinka paksu tilavuudeltaan suurin pölkky on?

253. Koneen nopeutta voidaan säätää niin, että kone valmistaa $0 - 300$ pulloa tunnissa. Arvioidaan, että koneen tunnissa tekemien viallisten pullojen määrä on suoraan verrannollinen valmistusnopeuden neliöön. Kun nopeus oli 80 pulloa tunnissa, joka viides pullo oli virheelinen. Mille nopeudelle kone tulee säätää, jotta se tekisi tunnissa mahdollisimman monta virheetöntä pulloa? Kuinka monta virheetöntä pulloa kone tällöin valmistaa tunnissa?

254. Urheilukenttää rajaa 400 metriä pitkä juoksurata, joka muodostuu kahdesta yhtä pitkästä suorasta ja kahdesta puoliympyrän muotoisesta kaaresta. Kuinka pitkiä suorien tulee olla, jotta

- suorien rajaaman suorakulmion muotoisen kentän osan pinta-ala on mahdollisimman suuri
- koko kentän pinta-ala on mahdollisimman suuri?

255. Rautalanka, jonka pituus on 1,00 m, katkaistaan kahteen osaan. Toinen osa taivutetaan ympyräksi ja toinen neliöksi. Kuinka katkaisu on suoritettava, jotta neliön ja ympyrän pinta-alojen summa olisi mahdollisimman
a) suuri b) pieni?

256. Suoran ympyräkartion korkeus on 9 ja pohjan säde 3. Kartion sisällä on suora neliöpohjainen särmiö, jonka toinen pohja on kartion pohjalla. Mikä särmiön suurin mahdollinen tilavuus on?

257. Suoran ympyräkartion pohjan säde on R ja korkeus H . Kartion sisään asetetaan suora ympyrälieriö niin, että lieriön toinen pohja on kartion pohjalla. Osoita, että tilavuudeltaan suurimman lieriön tilavuuden suhde kartion tilavuuteen ei riipu kartion mitoista. Mikä tämä suhde on?

Funktioiden tulon ja funktion potenssin derivaatta

Ongelma

Autolla ajetaan joka vuosi jokseenkin sama kilometrimäärä. Auton omistaja ennakoi, että auton ikääntyessä vuodessa kuluvan polttoaineen määrä kasvaa noin 100 litraa joka vuosi. Oletetaan, että polttoaineen litrahinta nousee joka vuosi 0,10 euroa.

a) Voidaanko tiedoista päätellä, kuinka paljon vuotuiset polttoainekustannukset kasvavat?

Kuinka paljon vuotuiset polttoainekustannukset kasvavat, jos edellisellä vuonna

b) polttoainetta kului 1 000 litraa ja litrahinta oli 1,00 euroa

c) polttoainetta kului 2 000 litraa ja litrahinta oli 1,20 euroa?

d) Mistä tekijöistä polttoainekustannusten kasvu koostuu? Voit käyttää apuna vieressä olevaa geometrista mallia. Kuviossa a on vuodessa kuluvan polttoaineen määrä ja b polttoaineen litrahinta.

0,10	
b	
a	100

Funktioiden f ja g *tulofunktio* fg on funktio, jonka arvo kohdassa x on funktioiden f ja g arvojen tulo: $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa a . Määritetään tulofunktion fg derivaatta kohdassa a .

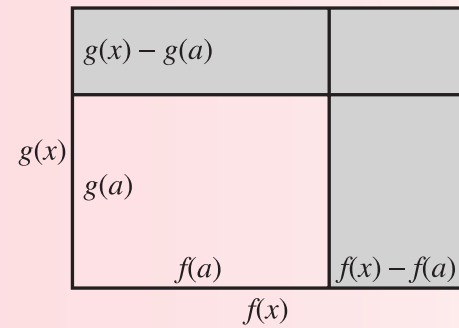
Funktion fg erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}.$$

Osoittajana oleva tulofunktion arvojen muutos $f(x)g(x) - f(a)g(a)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) - f(a)g(a) \\ &= (f(x) - f(a))g(a) + f(a)(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

Lausekkeiden yhtäsuuruutta havainnollistaa viereinen kuvio. Yhtäsuuruus voidaan perustella myös suorittamalla oikean puolen laskutoimitukset.



Kun erotukselle $f(x)g(x) - f(a)g(a)$ muodostettu lauseke jaetaan erotuksella $x - a$, erotusosamäärä tulee muotoon

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(g(x) - g(a)).$$

Määritetään jokaisen kolmen yhteenlasketun lausekkeen raja-arvo kohdassa a .

Ensimmäinen lauseke $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a)$ on funktion f erotusosamäärä kohdassa a kerrottuna funktion g arvolla $g(a)$, joten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a) \rightarrow f'(a)g(a), \text{ kun } x \rightarrow a.$$

Toinen lauseke on funktion g erotusosamäärä kohdassa a kerrottuna funktion f arvolla $f(a)$, joten

$$f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \rightarrow f(a)g'(a), \text{ kun } x \rightarrow a.$$

Kolmas lauseke on funktion f erotusosamäärä kohdassa a kerrottuna erotuksella $g(x) - g(a)$. Koska funktio g on derivoituva kohdassa a , se on myös jatkuva kohdassa a . Kun muuttujan x arvot lähestyvät arvoa a , funktion g arvot lähenevät arvoa $g(a)$, joten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(g(x) - g(a)) \rightarrow f'(a)(g(a) - g(a)) = f'(a) \cdot 0 = 0, \text{ kun } x \rightarrow a.$$

Saatiin:

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \text{ kun } x \rightarrow a.$$

Päätely osoitti, että jos funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa a , niin myös tulofunktio fg on derivoituva kohdassa a , ja tulofunktion derivaatta on

$$f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Muotoillaan derivointikaava:

Funktioiden tulo derivaatta

Derivoituvien funktioiden f ja g tulofunktion fg derivaattafunktio on

$$(fg)' = f'g + fg'$$

eli

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

ESIMERKKI 1

Derivoi funktio $(x^3 - 4)(x^2 + 1)$ käyttämällä tulo derivointikaavaa.

Ratkaisu

Funktio $(x^3 - 4)(x^2 + 1)$ on funktioiden $x^3 - 4$ ja $x^2 + 1$ tulo. Derivoidaan käyttämällä tulo derivointikaavaa.

$$\begin{aligned} D(\underbrace{f(x)}_{x^3-4} \underbrace{g(x)}_{x^2+1}) &= \underbrace{f'(x)}_{3x^2} \underbrace{g(x)}_{x^2+1} + \underbrace{f(x)}_{x^3-4} \underbrace{g'(x)}_{2x} \\ D((x^3 - 4)(x^2 + 1)) &= 3x^2 \cdot (x^2 + 1) + (x^3 - 4) \cdot 2x \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 - 8x = 5x^4 + 3x^2 - 8x \end{aligned}$$

Vastaus

$$5x^4 + 3x^2 - 8x^*$$

* Samaan tulokseen olisi päästy myös laskemalla ensin lausekkeiden tulo ja derivoimalla näin saatu polynomifunktio $x^5 + x^3 - 4x^2 - 4$.

JOHDANTOESIMERKKI 2

Muodosta derivointikaava funktion f a) neliölle f^2 b) kuutiolle f^3 .
c) Muotoile otaksuma funktion f potenssin f^n (n positiivinen kokonaisluku) derivointikaavalle. Tutki otaksuman paikkansapitävyyttä, kun $n = 4$.

Ratkaisu

a) Neliö $f(x)^2$ ilmaistaan tulona ja käytetään tulon derivointikaavaa.

$$\begin{aligned} Df(x)^2 &= D(f(x)f(x)) && \text{Tulon derivointikaava } (uv)' = u'v + uv'. \\ &= f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) \\ &= 2f(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Siiis $Df(x)^2 = 2f(x) \cdot f'(x)$.

b) Kuutio $f(x)^3$ ilmaistaan kahden tekijän tulona ja käytetään tulon derivointikaavaa ja a-kohdan tulosta.

$$\begin{aligned} Df(x)^3 &= D(f(x)^2 f(x)) && \text{Tulon derivointikaava } (uv)' = u'v + uv'. \\ &= (Df(x)^2) \cdot f(x) + f(x)^2 \cdot f'(x) && \text{Käytetään a-kohdan tulosta.} \\ &= 2f(x)f'(x) \cdot f(x) + f(x)^2 \cdot f'(x) \\ &= 2f(x)^2 \cdot f'(x) + f(x)^2 \cdot f'(x) = 3f(x)^2 \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Siiis $Df(x)^3 = 3f(x)^2 \cdot f'(x)$.

c) a- ja b-kohtien tulokset muistuttavat potenssifunktioiden derivointikaavoja $Dx^2 = 2x$ ja $Dx^3 = 3x^2$. Funktion $f(x)$ potenssiin on sovellettu potenssifunktion derivointikaavaa ja tulos on kerrottu funktion $f(x)$ derivaatalla $f'(x)$. Vastaava yleinen kaava olisi

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

Tutkitaan, pitääkö kaava paikkansa, kun $n = 4$, eli onko

$Df(x)^4 = 4f(x)^3 \cdot f'(x)$. Derivoidaan funktio $f(x)^4$ tulon derivointikaavan ja b-kohdan tuloksen avulla.

$$\begin{aligned} Df(x)^4 &= D(f(x)^3 f(x)) = 3f(x)^2 f'(x) \cdot f(x) + f(x)^3 \cdot f'(x) \\ &= 3f(x)^3 \cdot f'(x) + f(x)^3 \cdot f'(x) = 4f(x)^3 \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Siis kaava $Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$ pätee myös silloin, kun $n = 4$.

Vastaus

$$\begin{aligned} \text{a) } Df(x)^2 &= 2f(x) \cdot f'(x) & \text{b) } Df(x)^3 &= 3f(x)^2 \cdot f'(x) \\ \text{c) } Df(x)^n &= nf(x)^{n-1} \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että edellisessä esimerkissä päätelty kaava pätee yleisesti.

Funktion potenssin derivaatta

Funktion f potenssi f^n , missä n on positiivinen kokonaisluku, derivoidaan kaavalla

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

Kertojana on alkuperäinen eksponentti. Eksponentti pienenee yhdellä. Kolmantena tekijänä on potenssiin korotetun funktion derivaatta.

ESIMERKKI 3

Derivoi funktio $(5x^3 - 1)^4$.

Ratkaisu

Sovelletaan funktion potenssin derivointikaavaa funktion $f(x) = 5x^3 - 1$ neljänteen potenssiin.

$$\begin{aligned} D(5x^3 - 1)^4 &= 4(5x^3 - 1)^3 \cdot D(5x^3 - 1) & Df(x)^4 &= 4f(x)^3 \cdot f'(x) \\ &= 4(5x^3 - 1)^3 \cdot 15x^2 = 60x^2(5x^3 - 1)^3 \end{aligned}$$

Vastaus

$$60x^2(5x^3 - 1)^3$$

ESIMERKKI 4

- a) Olkoon $f(x) = x^2(3x - 1)^5$. Määritä $f'(1)$.
 b) Määritä funktion $f(x)$ derivaattafunktion nollakohdat.

Ratkaisu

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^2(3x - 1)^5$. Funktio $f(x)$ on funktioiden x^2 ja $(3x - 1)^5$ tulo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= Dx^2 \cdot (3x - 1)^5 + x^2 \cdot D(3x - 1)^5 && \text{Tulon derivointikaava} \\ &&& (uv)' = u'v + uv'. \\ &= 2x \cdot (3x - 1)^5 + x^2 \cdot 5(3x - 1)^4 \cdot 3 && \text{Potenssi } (3x - 1)^5 \text{ derivoidaan} \\ &&& \text{kaavalla } Df^5 = 5f^4 \cdot f'. \\ &= 2x(3x - 1)^5 + 15x^2(3x - 1)^4 \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)^5 + 15 \cdot 1^2 \cdot (3 \cdot 1 - 1)^4 \\ &= 2 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^4 = 304. \end{aligned}$$

- b) Nollakohtien määrittämiseksi derivaattafunktion lauseke jaetaan tekijöihin.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x - 1)^5 + 15x^2(3x - 1)^4 && \text{Yhteenlaskettavilla lausekkeilla} \\ &&& \text{on yhteiset tekijät } x \text{ ja } (3x - 1)^4. \\ &= x(3x - 1)^4 \cdot 2(3x - 1) + x(3x - 1)^4 \cdot 15x && \text{Erotetaan yhteiset tekijät.} \\ &= x(3x - 1)^4(2(3x - 1) + 15x) \\ &= x(3x - 1)^4(6x - 2 + 15x) \\ &= x(3x - 1)^4(21x - 2) \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan tulo on nolla, jos ja vain jos jokin tulon tekijöistä on nolla. Potenssi on nolla, jos ja vain jos kantaluku on nolla.

$$x(3x - 1)^4(21x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 3x - 1 = 0 \text{ tai } 21x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{1}{3} \text{ tai } x = \frac{2}{21}$$

Vastaus

- a) 304 b) $0, \frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{21}$

TEHTÄVIÄ

 SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

258. Derivoi funktio $h(t) = t^3(t^2 - 1)$ tulo-derivointikaavalla.

259. Funktiosta g tiedetään, että $g(-1) = 3$ ja $g'(-1) = -2$. Määritä funktion $h(x) = x^2g(x)$ derivaatta kohdassa -1 .

260. Derivoi funktio.

a) $(5x - 1)^4$ b) $(1 - x)^3$ c) $(x^3 + 6)^5$

261. Mitkä ovat funktion $f(x) = (x^2 - 3x)^4$

- a) nollakohdat
b) derivaattafunktion nollakohdat?

262. Laske $f'(1)$, kun $f(x) = 5x(x^3 - 2)^6$.

263. Määritä funktion $g(x) = x^2(4x + 1)^3$

- a) derivaattafunktio
b) derivaattafunktion nollakohdat.

264. Arpajaisissa, jossa arpojen lukumäärä on suuri, todennäköisyys, että yksittäinen arpa on voittoarpa, on p .

- a) Mikä on todennäköisyys, että arpoja ostettaessa viides arpa on ensimmäinen voittoarpa?
b) Millä p :n arvolla a-kohdan todennäköisyys on suurin?

265. Määritä funktion $h(x) = (x + 1)^3(2x - 1)^2$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

 SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

266. Funktioista f ja g tiedetään, että $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $g(1) = -1$ ja $g'(1) = 4$. Määritä funktion $h(x) = f(x)g(x)$ derivaatta kohdassa 1 .

267. Derivoi funktio.

a) $(\frac{1}{2}x - 1)^6$ b) $(1 - 4x^3)^2$

c) $(x^3 - 2x)^3$

268. Tiedetään, että $f(3) = -5$ ja $f'(3) = 4$.

- Mikä on funktion a) $g(x) = f(x)^2$
b) $h(x) = f(x)^8$ derivaatta kohdassa 3 ?

269. Määritä funktion $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^4$ ja derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat.

270. Mikä on funktion $f(x) = x(3 - 4x)^3$ kuvaajalle muuttujan arvon 1 kohdalle piirretyn tangentin a) kulmakerroin b) yhtälö?

271. Määritä funktion $f(x) = (x + 1)^2(3x - 1)^5$

- a) derivaatta kohdassa 0
b) derivaattafunktion nollakohdat.

272. Olkoon p tapahtuman A todennäköisyys erään toistokokeen yksittäisessä toistossa.

- a) Mikä on todennäköisyys, että A tapahtuu viidessä toistossa kaksi kertaa?
b) Millä p :n arvolla a-kohdan todennäköisyys on suurin?

273. Muotoile derivointikaava kolmen funktion f , g ja h tulofunktiolle fgh . Laske kaavan avulla funktion $u(x) = xg(x)h(x)$ derivaatta kohdassa -1 , kun tiedetään, että $g(-1) = 2$, $g'(-1) = 3$, $h(-1) = 4$ ja $h'(-1) = 5$.

274. Luvut m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Missä kohdassa välillä $[0, 1]$ funktion $h(x) = x^m(1 - x)^n$ arvo on suurin? Mikä suurin arvo on?

275. Eräs mitta lukujen etäisyydelle on lukujen erotuksen neliö. Mikä lukusuoran luku a sijaitsee tässä suhteessa parhaiten lukuihin $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ nähden, eli millä a :n arvolla neliöiden summa $(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2$ on pienin?

276. Jos ympyrän keskipiste on origo ja ympyrän säde on 2, niin ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 4$. Kun tästä yhtälöstä ratkaistaan y , saadaan $y = \sqrt{4 - x^2}$ tai $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Erityisesti siis x -akselin yläpuolella oleva puoliympyrä on funktion $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ kuvaaja. Muodosta funktion $f(x)$ derivaattafunktio $f'(x)$ derivoimalla yhtälön $x^2 + f(x)^2 = 4$ molemmat puolet ja ratkaisemalla näin saadusta yhtälöstä $f'(x)$. Käytettyä menetelmää, jossa funktion derivaattafunktio löydettiin derivoimalla funktion kuvaajan yhtälö, kutsutaan *implisiittiseksi derivoimiseksi*.

277. a) Minkä funktion f kuvaaja käyrän (ellipsin) $4x^2 + y^2 = 9$ x -akselin yläpuolinen osa on? Määritä implisiittisesti derivoimalla (ks. edellinen tehtävä) funktion f derivaattafunktio.

b) Funktion $g(x) = \frac{1}{x^3}$ kuvaajan pisteet toteuttavat yhtälön $x^3y = 1$. Määritä funktion g derivaattafunktio.

c) Määritä funktion $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ derivaattafunktio.

Funktioiden osamäärän derivaatta

Funktioiden f ja g osamäärä $\frac{f}{g}$ on funktio, jonka arvo kohdassa x on funktioiden f ja g arvojen osamäärä.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Erotusosamäärän avulla voidaan osoittaa, että kahden derivoituvan funktion f ja g osamäärä $\frac{f}{g}$ on derivoituva. Seuraavassa johdetaan kaava, jolla osamäärän derivaatta voidaan laskea.

Merkitään $h = \frac{f}{g}$. Tällöin $hg = f$. Tulon derivointikaavan mukaan

$$h'g + hg' = f'.$$

Sijoitetaan $h = \frac{f}{g}$ ja ratkaistaan h' .

$$h'g + \frac{fg'}{g} = f'$$

$$h'g = f' - \frac{fg'}{g} \quad | : g$$

$$h' = \overset{g)}{f'} - \frac{fg'}{g^2}$$

Lavennetaan samannimisiksi ja suoritetaan vähennyslasku.

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Saatiin funktioiden osamäärän derivointikaava.

Funktioiden osamäärän derivaatta

Funktioiden f ja g osamäärän $\frac{f}{g}$ derivaatafunkti on

$$D \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Funktio $\frac{f}{g}$ ja sen derivaatafunkti eivät ole määritellyt nimittäjän g nollakohdissa.

ESIMERKKI 1

- Derivoi funktio $\frac{x^3}{2x-1}$.
- Määritä derivaatafunktion nollakohdat.

Ratkaisu

- Funktio $\frac{x^3}{2x-1}$ on funktioiden $f(x) = x^3$ ja $g(x) = 2x - 1$ osamäärä.

$$\begin{aligned} D \frac{x^3}{2x-1} &= \frac{(Dx^3) \cdot (2x-1) - x^3 \cdot D(2x-1)}{(2x-1)^2} & D \frac{f}{g} &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (2x-1) - x^3 \cdot 2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Funktion $\frac{x^3}{2x-1}$ derivaatafunkti on $\frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$.

Funktio $\frac{x^3}{2x-1}$ ja derivaatafunkti ovat määritellyt, kun $x \neq \frac{1}{2}$.

b) Derivaatafunktion nollakohdat määritetään ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{4x^3 - 3x^2}{(2x - 1)^2} = 0.$$

$$\frac{4x^3 - 3x^2}{(2x - 1)^2} = 0$$

Osamäärä on nolla, jos ja vain jos jaettava on nolla.

$$4x^3 - 3x^2 = 0$$

Erotetaan termien yhteinen tekijä x^2 .

$$x^2(4x - 3) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ tai } 4x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{3}{4}$$

Molemmat juuret kuuluvat derivaatafunktion määrittelyjoukkoon.

Derivaatafunktion nollakohdat ovat 0 ja $\frac{3}{4}$.

Vastaus

a) $\frac{4x^3 - 3x^2}{(2x - 1)^2}$ b) 0 ja $\frac{3}{4}$

JOHDANTOESIMERKKI 2

- a) Derivoi funktio $\frac{1}{x^5}$.
- b) Lauseke $\frac{1}{x^5}$ voidaan ilmaista muuttujan x potenssina, jonka eksponentti on negatiivinen: $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$. Saadaanko oikea tulos, jos funktio derivoidaan potenssifunktion x^n derivointikaavalla $Dx^n = nx^{n-1}$?

Ratkaisu

- a) Funktio $\frac{1}{x^5}$ on vakiofunktion 1 ja potenssifunktion x^5 osamäärä. Derivoidaan funktio käyttämällä osamäärän derivointikaavaa.

$$\begin{aligned} D\frac{1}{x^5} &= \frac{(D1) \cdot x^5 - 1 \cdot Dx^5}{(x^5)^2} & D\frac{f}{g} &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ &= \frac{0 \cdot x^5 - 1 \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{-5x^4}{x^{10}} = -\frac{5}{x^6}. \end{aligned}$$

Funktion $\frac{1}{x^5}$ derivaatafunkti on $-\frac{5}{x^6}$.

- b) Kun kaavaa $Dx^n = nx^{n-1}$ sovelletaan funktioon x^{-5} , saadaan

$$Dx^{-5} = -5 \cdot x^{-5-1} = -5 \cdot x^{-6} = -5 \cdot \frac{1}{x^6} = -\frac{5}{x^6}.$$

Kaava antaa siis tässä tapauksessa oikean tuloksen.

Vastaus

- a) $-\frac{5}{x^6}$ b) Saadaan.

Edellisen johdantoesimerkin 2 laskut voidaan yleistää kaikille muuttujan x potensseille. Näin saadaan:

Potenssifunktion derivointikaavan yleistys

Jokainen funktio x^n , missä n on kokonaisluku, voidaan derivoida kaavalla

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Kertojana on alkuperäinen eksponentti. Eksponentti pienenee yhdellä.

Vastaavasti yleistyy myös funktion potenssin derivointikaava.

Funktion potenssin derivointikaavan yleistys

Derivoituvan funktion $f(x)$ jokainen potenssi $f(x)^n$, missä n on kokonaisluku, voidaan derivoida kaavalla

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

Kertojana on alkuperäinen eksponentti. Eksponentti pienenee yhdellä. Kolmantena tekijänä on potenssiin korotetun funktion derivaatta.

Kun eksponentti n on negatiivinen, funktio $f(x)^n$ ei ole määritelty funktion f nollakohdissa.

Potenssin derivointikaavan ja funktion potenssin derivointikaavan yleistäminen on tehtävänä 301.

ESIMERKKI 3

Derivoi funktio.

a) $\frac{1}{x^3}$ b) $\frac{3}{4x}$ c) $\frac{5}{(x^2-1)^3}$

Ratkaisu

a) Lauseke $\frac{1}{x^3}$ on muuttujan x potenssi x^{-3} . Käytetään potenssin derivointikaavan yleistystä.

$$\begin{aligned} D \frac{1}{x^3} &= D x^{-3} & D x^n &= n x^{n-1}, \text{ missä } n = -3. \\ &= -3 \cdot x^{-3-1} & \text{Kertojana on alkuperäinen eksponentti.} \\ & & \text{Eksponentti pienenee yhdellä.} \\ &= -3 \cdot x^{-4} & \text{Palataan takaisin murtolausekemuotoon.} \\ &= -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

Funktion $\frac{1}{x^3}$ derivaatafunkti on $-\frac{3}{x^4}$.

b) Funktion $\frac{3}{4x}$ lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x}$. Luvun x käänteisluku $\frac{1}{x}$ on potenssi x^{-1} . Käytetään potenssifunktion derivointikaavaa.

$$\begin{aligned} D \frac{3}{4x} &= D \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{3}{4} D \frac{1}{x} = \frac{3}{4} D x^{-1} & D x^n &= n x^{n-1}, \text{ missä } n = -1. \\ &= \frac{3}{4} \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -\frac{3}{4} \cdot x^{-2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{3}{4x^2} \end{aligned}$$

c) Funktion $\frac{5}{(x^2 - 1)^3}$ lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{5}{(x^2 - 1)^3} = 5 \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)^3} = 5 \cdot (x^2 - 1)^{-3}.$$

Käytetään funktion potenssin derivointikaavaa.

$$D \frac{5}{(x^2 - 1)^3} = 5 D(x^2 - 1)^{-3} \quad Df(x)^n = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x), \text{ missä}$$

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ ja } n = -3.$$

$$= 5 \cdot (-3) \cdot (x^2 - 1)^{-3-1} \cdot D(x^2 - 1)$$

$$= 5 \cdot (-3) \cdot (x^2 - 1)^{-4} \cdot 2x$$

Palataan takaisin
murtolausekemuotoon.

$$= 5 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)^4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{30x}{(x^2 - 1)^4}$$

Vastaus

a) $-\frac{3}{x^4}$

b) $-\frac{3}{4x^2}$

c) $-\frac{30x}{(x^2 - 1)^4}$

ESIMERKKI 4

- a) Derivoi funktio $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2}$.
- b) Määritä derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat.

Ratkaisu

- a) Funktio $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2}$ voidaan derivoida osamäärän derivointikaavalla. Murtolauseke, jonka jakaja on monomi (muuttujan potenssi luvulla kerrottuna), on kuitenkin usein yksinkertaisempi derivoida, jos ensin jaetaan termeittäin.

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^2} \quad \text{Jaetaan termeittäin.}$$

$$= \frac{\overset{1}{4}\overset{1}{\cancel{x^2}}}{\underset{1}{\cancel{x^2}}} - \frac{\overset{1}{4}\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{x}{\cancel{x^2}}} + \frac{1}{x^2} \quad \text{Supistetaan.}$$

$$= 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$= 4 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Ilmaistaan $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{x^2}$ muuttujan x potensseina.

$$= 4 - 4 \cdot x^{-1} + x^{-2}$$

$$f'(x) = 0 - 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}$. Funktion $f(x)$ ja derivaattafunktion $f'(x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Ratkaistaan derivaattafunktion $f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ nollakohdat.

Tapa 1. Saatetaan derivaattafunktion lauseke ensin murtolausekkeen muotoon (muotoon $\frac{P(x)}{Q(x)}$).

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{4x}{x^3} - \frac{2}{x^3} = \frac{4x-2}{x^3}$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$\frac{4x-2}{x^3} = 0 \quad \text{Osamäärä on nolla, jos ja vain jos jaettava on nolla.}$$

$$4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Juuri $\frac{1}{2}$ kuuluu määrittelyjoukkoon. Derivaatan nollakohta on $\frac{1}{2}$.

Tapa 2. Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$ kertomalla nimittäjät pois.

$$\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 0 \quad | \cdot x^3 \neq 0$$

$$\frac{4\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}} - \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 0 \quad \text{Supistetaan.}$$

$$4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Juuri $\frac{1}{2}$ kuuluu määrittelyjoukkoon. Derivaatan nollakohta on $\frac{1}{2}$.

Vastaus

$$\text{a) } f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} \quad \text{b) } \frac{1}{2}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**278.** Derivoi funktio.

a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{x^3}{x^2-1}$

279. Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ b) $g(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

280. Mikä on funktion $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ kuvaajalle muuttujan arvon 2 kohdalle piirretyn tangentin a) kulmakerroin b) yhtälö?**281.** Derivoi funktio.

a) $-\frac{1}{x}$ b) $\frac{5}{6x^2}$ c) $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^6}$

282. Derivoi funktio.

a) $\frac{1}{(3x-2)^2}$ b) $\frac{2}{(4-x^2)^3}$

283. Derivoi funktio.

a) $\frac{1}{x^2-1}$ b) $\frac{3}{1-2x}$

284. Derivoi funktio ja määritä derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ b) $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$

285. Määritä funktion $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ suurin ja pienin arvo välillä $[\frac{1}{4}, 1]$.**286.** Missä pisteissä ja missä kulmassa funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$ kuvaaja leikkaa x -akselin?

Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

287. Mitkä ovat funktion $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$ kuvaajan a) vaakasuorien b) suoran $y=3x$ suuntaisten tangenttien yhtälöt?**288.** Mihin käyrän $xy=1$ pisteisiin piirretyt käyrän tangentit kulkevat pisteen $(-1, 3)$ kautta?SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ**289.** Derivoi funktio.

a) $\frac{3x}{1-x^2}$ b) $\frac{x^3}{1-x}$

290. Määritä funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ derivaattafunktion nollakohdat.**291.** Muodosta funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ kuvaajalle muuttujan arvon 1 kohdalle piirretyn tangentin yhtälö.**292.** Osoita, että funktio $g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ on kaikkialla aidosti kasvava.**293.** Laske funktion derivaatta kohdassa -2 .

a) $f(t) = \frac{3}{t} - \frac{2}{3t^3}$ b) $g(t) = \frac{1}{t}(t - \frac{1}{t})^2$

294. Derivoi funktio.

a) $\frac{3}{(x^2 - 1)^2}$ b) $\frac{2}{3(1 - 5x)^3}$
 c) $\frac{2}{3(1 - 5x)}$

295. Funktiosta f tiedetään, että $f(2) = -1$ ja $f'(2) = 3$. Määritä funktion

a) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ b) $h(x) = \frac{1}{f(x)^2}$

derivaatta kohdassa 2.

296. Mikä on funktion $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ suurin arvo välillä $[1, 2]$?

297. Mihin käyrän $y = \frac{1}{1 - x}$ pisteisiin piirretyt tangentit ovat suoran $x - 4y - 6 = 0$ suuntaiset?

298. Mikä y -akselin suhteen symmetrinen paraabeli sivuaa käyrää $y = \frac{4}{x^2}$ pisteissä, joiden x -koordinaatit ovat -2 ja 2 ?

299. Osoita, että käyrälle $y = \frac{1}{x}$ piirretyn tangentin ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion pinta-ala ei riipu siitä, mihin käyrän pisteeseen tangentti on piirretty.

300. Funktiolla f on nollakohta x_0 . Funktio f on kahdesti derivoituva kohdassa x_0 , ja derivaatta $f'(x_0)$ on erisuuri kuin nolla.

Osoita, että funktion $h = \frac{f}{f'}$ kuvaaja leikkaa x -akselin pisteessä $(x_0, 0)$ kulmassa, jonka suuruus on 45° .

301. Osoita osamäärän derivointikaavan avulla, että seuraavat kaavat pätevät myös silloin, kun n on negatiivinen kokonaisluku.

a) potenssin derivointikaava $Dx^n = nx^{n-1}$

b) funktion potenssin derivointikaava

$Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$.

Rationaaliyhtälö ja rationaalifunktion merkki

Luvussa varmistetaan rationaaliyhtälön ratkaisemisen taito, opitaan tutkimaan rationaalifunktion arvojen merkkiä ja ratkaisemaan rationaali-epäyhtälöitä.

ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x} = 1$.

Ratkaisu

Nimittäjän $x+3$ nollakohta on -3 . Nimittäjän x nollakohta on 0 . Yhtälö on määritelty, kun $x \neq -3$ ja $x \neq 0$.

Tapa 1. Yhtälön molemmat puolet kerrotaan tulolla $x(x+3)$, joka on määrittelyjoukossa eri suuri kuin nolla, ja supistetaan nimittäjät pois.

$$\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x} = 1 \quad | \cdot x(x+3) \neq 0$$

$$\frac{\cancel{x(x+3)} \cdot x}{\cancel{x+3}} - \frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}} = x(x+3) \quad \text{Supistetaan.}$$

$$x^2 - (x+3) = x(x+3) \quad \text{Erotus merkitään käyttäen sulkeita.}$$

$$x^2 - x - 3 = x^2 + 3x$$

$$-4x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Luku $-\frac{3}{4}$ kuuluu määrittelyjoukkoon.

Tapa 2. Saatetaan molemmat puolet samannimisiksi murtolausekkeiksi, minkä jälkeen osoittajat voidaan merkitä yhtä suuriksi.

$$\overset{x}{\frac{x}{x+3}} - \overset{x+3}{\frac{1}{x}} = \overset{x(x+3)}{1}$$

$$\frac{x^2}{x(x+3)} - \frac{x+3}{x(x+3)} = \frac{x(x+3)}{x(x+3)}$$

$$\frac{x^2 - (x+3)}{x(x+3)} = \frac{x(x+3)}{x(x+3)}$$

Osoittajaksi tulee osoittajien erotus. Erotus merkitään käyttäen sulkeita.

$$x^2 - (x+3) = x(x+3)$$

Yhtälö toteutuu, kun osoittajat ovat yhtä suuret.

$$x^2 - x - 3 = x^2 + 3x$$

$$-4x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Luku $-\frac{3}{4}$ kuuluu määrittelyjoukkoon.

Vastaus

$$x = -\frac{3}{4}$$

Ongelma

a) Missä kohdissa funktio $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ ei ole määritelty? Mitkä ovat funktion f nollakohdat?

b) Piirrä funktion f kuvaaja graafisella laskimella. Missä kohdissa funktion f merkki vaihtuu. Millä muuttujan arvoilla funktion

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \text{ arvot ovat positiivisia?}$$

Rationaalifunktion arvojen merkki

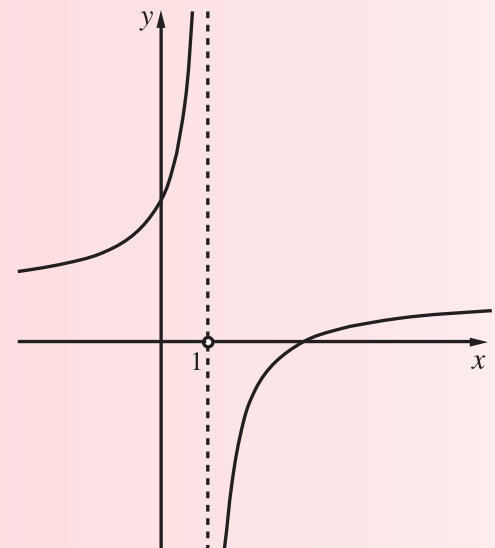
Rationaalifunktion arvojen merkki voi vaihtua funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Kohdat, joissa merkki voi vaihtua, jakavat lukusuoran osaväleihin. Funktion merkki kullakin osavälillä saadaan selville laskemalla yksi funktion arvo.

Kuviossa on funktion

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \text{ kuvaaja. Funktio ei}$$

ole määritelty kohdassa $x = 1$, ja funktiolla on nollakohta 3. Funktion arvojen merkki vaihtuu kohdissa 1 ja 3. Funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x < 1$ tai $x > 3$, ja negatiivisia, kun $1 < x < 3$.



ESIMERKKI 2

- a) Millä väleillä funktion $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ arvot ovat positiivisia ja millä negatiivisia?
- b) Millä muuttujan arvoilla epäyhtälö $\frac{2x-3}{x+4} > 0$ toteutuu?

Ratkaisu

a) Funktion merkki voi vaihtua funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Funktio $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa -4 .

Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$\frac{2x-3}{x+4} = 0 \quad \text{Osamäärä on nolla, jos ja vain jos jaettava on nolla.}$$

$$2x - 3 = 0$$

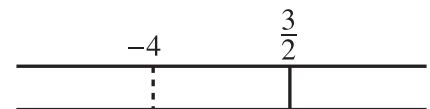
$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Luku $\frac{3}{2}$ kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon.

Funktiolla f on nollakohta $\frac{3}{2}$.

Laaditaan funktion f merkkikaavio, johon merkitään funktion nollakohta $\frac{3}{2}$ ja kohta -4 , jossa funktio ei ole määritelty.*



* Kohdan -4 merkintätapa kaaviossa muistuttaa, että kohta ei voi sisältyä minkään epäyhtälön ratkaisuun.

Siirretään termejä niin, että epäyhtälön oikealle puolelle jää 0, ja tutkitaan vasemmalle puolelle muodostuvan rationaalifunktion arvojen merkit.*

$$\frac{4x}{x-3} \leq 1$$

$$\frac{4x}{x-3} - 1 \leq 0$$

Nollakohtien määrittäminen ja merkin tutkiminen on usein yksinkertaisempaa, kun funktion lauseke saatetaan murtolausekkeen muotoon.

$$\frac{4x}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{4x - (x-3)}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{4x - x + 3}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{3x + 3}{x-3} \leq 0$$

Funktion $\frac{3x+3}{x-3}$ arvojen merkki voi vaihtua kohdassa 3, jossa funktio ei ole määritelty, ja funktion nollakohdissa.

Ratkaistaan nollakohdat.

$$\frac{3x+3}{x-3} = 0 \quad \text{Osamäärä on nolla, jos ja vain jos jaettava on nolla.}$$

$$3x + 3 = 0$$

$$3x = -3$$

$$x = -1 \quad \text{Juuri } -1 \text{ kuuluu määrittelyjoukkoon.}$$

* Epäyhtälöstä $\frac{4x}{x-3} \leq 1$ ei saa poistaa nimittäjää kertomalla lausekkeella $x-3$.

Epäyhtälöä kerrottaessa tulee aina tietää kertojan merkki, koska epäyhtälön suunta säilyy tai kääntyy sen mukaan, onko kertoja positiivinen vai negatiivinen. Siksi lausekkeella kertominen on mahdollista vain silloin, kun lauseke on kaikilla muuttujan arvoilla samanmerkkinen. Lauseke $x-3$ on toisilla x :n arvoilla positiivinen ja toisilla negatiivinen.

Kohdat, joissa funktio $\frac{3x+3}{x-3}$ voi vaihtaa merkkiään, ovat -1 ja 3 .

Lasketaan yksi funktion arvo jokaiselta väliltä. Merkitään

$$r(x) = \frac{3x+3}{x-3}.$$

$$r(-3) = 1 > 0$$

$$r(0) = -1 < 0$$

$$r(6) = 7 > 0$$

	-1		3	
+		-		+

Funktion $\frac{3x+3}{x-3}$ arvot ovat negatiivisia, kun $-1 < x < 3$.

Epäyhtälön $\frac{3x+3}{x-3} \leq 0$ ratkaisujoukkoon sisältyy lisäksi funktion nollakohta -1 . Epäyhtälö toteutuu, kun $-1 \leq x < 3$.

Vastaus

$$-1 \leq x < 3$$

Rationaaliepäyhtälön kertominen lausekkeella

Koska epäyhtälöä kerrottaessa epäyhtälön suunta säilyy tai kääntyy kertojan merkistä riippuen, niin rationaaliepäyhtälöstä saa poistaa nimittäjät lausekkeella kertomalla vain silloin, kun kertojana oleva lauseke saa pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia arvoja.

Yleisesti rationaaliepäyhtälö ratkaistaan seuraavasti.

Rationaaliepäyhtälön ratkaiseminen

Epäyhtälön termit siirretään vasemmalle niin, että oikealle puolelle jää 0 , ja tutkitaan vasemmalle puolelle muodostuvan rationaalifunktion merkit

- ratkaisemalla funktion nollakohdat ja
- laatimalla funktion merkkikaavio, jossa nollakohtien lisäksi ovat kohdat, joissa epäyhtälö ei ole määritelty.

ESIMERKKI 4

Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

Ratkaisu

Funktio f ei ole määritelty nimittäjän $x - 1$ nollakohdassa 1. Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Funktion f kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Derivoidaan.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (x - 1) - (x^2 + 3) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \quad \text{Osamäärä on nolla, jos ja vain jos jaettava on nolla.}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 3$$

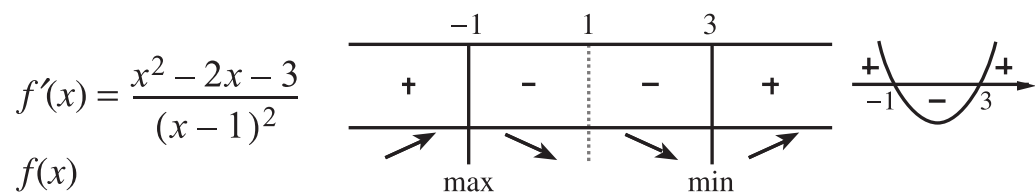
Molemmat juuret kuuluvat määrittelyjoukkoon $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio, johon merkitään nollakohdat -1 ja 3 ja kohta 1 , jossa funktio ei ole määritelty. Merkkikaavio täydennetään funktion $f(x)$ kulkukaavioksi.

Derivaattafunktion $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ nimittäjänä oleva lauseke

$(x - 1)^2$ on funktion koko määrittelyjoukossa positiivinen, joten derivaattafunktion merkit määrää osoittaja $x^2 - 2x - 3$. Funktion $x^2 - 2x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.*

* Derivaattafunktion merkit voidaan päätellä myös laskemalla yksi funktion f' arvo jokaisesta merkkikaavion lokerosta.



Kulkukaavion mukaan funktiolla $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ on maksimikohta -1 ja minimikohta 3 . Ääriarvot ovat

$$\text{maksimiarvo } f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3}{-1 - 1} = -2$$

ja

$$\text{minimiarvo } f(3) = \frac{3^2 + 3}{3 - 1} = 6.$$

Vastaus

maksimikohta -1 ja maksimiarvo -2 ,
 minimikohta 3 ja minimiarvo 6 .

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**302.** Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{5x-3}{x} - \frac{3x-1}{x} = 1$

b) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1$

303. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} = 1$

b) $1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}$

304. Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

a) $\frac{x-1}{x+3}$

b) $\frac{x-2}{x^2-5x}$

305. Ratkaise epäyhtälö.

a) $\frac{3x}{x-4} > 1$

b) $\frac{2x-1}{x} \leq 1$

306. Ratkaise epäyhtälö.

a) $\frac{1}{5x} < \frac{1}{x}$

b) $\frac{9}{x^3} \geq \frac{1}{x}$

307. Ratkaise epäyhtälö poistamalla ensin nimittäjä. Perustele ratkaisutapa.

a) $\frac{1}{x^2} \geq 1$

b) $\frac{4x}{x^2+3} < 1$

c) $\frac{x^2}{(x-1)^2} \geq 1$

308. Määritä funktion $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.**309.** a) Millä väleillä funktio $f(x) = x + \frac{500}{x^2}$ on kasvava ja millä väleillä vähenevä?b) Määritä funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot.**310.** Mihin käyrän $y = \frac{x}{4} - \frac{1}{x+1}$ pisteeseenpiirretty käyrän tangentti on suoran $x - 2y + 6 = 0$ suuntainen?**311.** Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{1}{x-x^2} - \frac{1}{x} = 2$

b) $2 + \frac{3}{t^2-1} = \frac{t-1}{t+1}$

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

312. Ratkaise yhtälö.

a) $x - \frac{3}{x-1} = 3$

b) $\frac{2x^2}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1$

313. Millä muuttujan arvoilla funktion

$\frac{2x-3}{x-2} - \frac{1}{x}$ arvo on a) 0 b) 2?

314. Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

a) $\frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2+2x}{x-2}$

315. Ratkaise epäyhtälö.

a) $\frac{x+3}{x-2} \geq 4$

b) $\frac{x+3}{x-2} \geq 1$

316. Millä reaalityyppisillä on seuraava ominaisuus? Kirjoita epäyhtälö ja ratkaise se.

- a) Luvun käänteisluku on pienempi tai yhtä suuri kuin 2.
b) Luku on pienempi kuin käänteislukunsa.

317. Ratkaise epäyhtälö $x + \frac{1}{x-3} < 1$.

318. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

319. a) Missä funktio $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}$ on kasvava ja missä vähenevä?

b) Määritä funktion g ääriarvokohdat ja ääriarvot.

320. Määritä käyrien $y = \frac{2x}{x+1}$ ja $y = \frac{2}{x} - 1$

leikkauspisteet ja osoita, että toisessa leikkauspisteessä käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

321. Ratkaise.

a) $\frac{1}{p^2-1} = \frac{p+5}{5p-5}$

b) $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{1}{x^2+x}$

322. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x+x^2}$.

323. Millä vakion b arvoilla funktiolla

$f(x) = x + \frac{b}{x}$ on ääriarvoja? Mitkä funktion ääri-

arvot silloin ovat? Tutki graafisella laskimella, miltä funktion kuvaaja näyttää niillä b :n arvoilla, joilla funktiolla on ääriarvoja, ja niillä b :n arvoilla, joilla funktiolla ei ole ääriarvoja.

Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo – sovelluksia

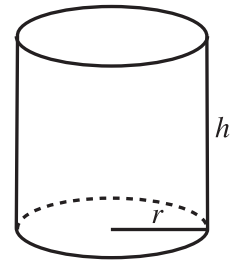
ESIMERKKI 1

Pellistä valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoinen kanneton litran mitta. Suunnittele lieriön mitat (pohjan halkaisija ja korkeus) niin, että peltiä tarvitaan mahdollisimman vähän.

Ratkaisu

Merkitään lieriön pohjan sädettä r ja lieriön korkeutta h . Tarvittavan pellin määrä on lieriön pohjan pinta-alan πr^2 ja vaipan pinta-alan $2\pi r \cdot h$ summa:

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h.$$



Yhteys muuttujien r ja h välille saadaan lieriön tilavuudesta.

Koska $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$, valitaan yksiköksi desimetri.

Lieriön tilavuus 1 dm^3 on pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo, joten

$$\pi r^2 h = 1.$$

Valitaan muuttujaksi r . Ratkaistaan yhtälöstä h .

$$\pi r^2 h = 1 \quad | : \pi r^2$$

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Tarvittavan pellin määrä $A = \pi r^2 + 2\pi r h$ muuttujan r funktiona on

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2}{r}.$$

Lieriön pohjan säteen suuruus voi olla mikä tahansa positiivinen luku.

Funktion $A(r)$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

Laaditaan funktion $A(r) = \pi r^2 + \frac{2}{r} = \pi r^2 + 2 \cdot r^{-1}$ kulkukaavio.

Derivoidaan.

$$A'(r) = \pi \cdot 2r + 2 \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 2\pi r - \frac{2}{r^2}$$

Saatetaan lauseke murto-
lausekkeen muotoon.

$$= \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2\pi r^3 - 2}{r^2} = 0$$

Osamäärä on nolla, jos ja vain jos jaettava on nolla.

$$2\pi r^3 - 2 = 0$$

$$2\pi r^3 = 2 \quad | : 2\pi$$

$$r^3 = \frac{1}{\pi}$$

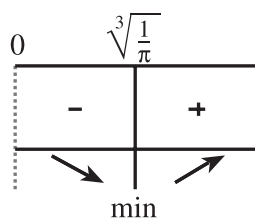
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \quad (\approx 0,683)$$

Laaditaan derivaattafunktion $A'(r) = \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $A(r)$ kulkukaavioksi. Derivaattafunktion lausekkeen nimittäjä r^2 on määrittelyjoukossa positiivinen. Derivaattafunktion merkin määrää osoittaja $2\pi r^3 - 2$.

$$2\pi \cdot 0,5^3 - 2 \approx -1,2 < 0$$

$$2\pi \cdot 1^3 - 2 \approx 4,3 > 0$$

$$A'(r) = \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$$

$$A(r)$$


Kulkukaavion mukaan funktio $A(r)$ saa määrittelyjoukossaan pienimmän arvon kohdassa $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,683$.

Peltiä kuluu vähiten, kun lieriön pohjan halkaisija on

$$2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 1,37 \text{ (dm) ja lieriön korkeus}$$

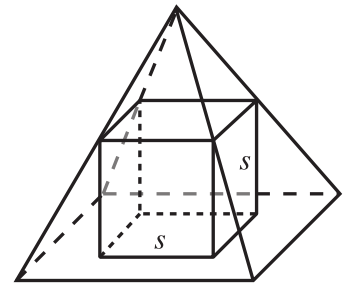
$$h = \frac{1}{\pi r^2} \approx \frac{1}{\pi \cdot 0,683^2} \approx 0,68 \text{ (dm)}.$$

Vastaus

pohjan halkaisija 13,7 cm ja korkeus 6,8 cm

ESIMERKKI 2

Kuution muotoisen säiliön suojaksi rakennetaan säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoinen katos. Kuution särmän pituus on s . Suunnittele katoksen mitat niin, että katoksen tilavuus on mahdollisimman pieni.



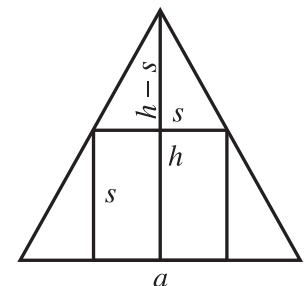
Ratkaisu

Pyramidin tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja pyramidin korkeuden tulosta. Merkitään pyramidin pohjasivun pituutta a ja pyramidin korkeutta h :

$$V = \frac{1}{3} a^2 h.$$

Yhteys muuttujien a ja h välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista. Leikataan pyramidi tasolla, joka kulkee huipun ja kahden vastakkaisen pohjasärmän keskipisteen kautta.

Leikkauskuvio on tasakylkinen kolmio. Ylös muodostuva pikkukolmio on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa.



Kolmioiden korkeuksien suhde on yhtä suuri kuin kantojen pituuksien suhde:

$$\frac{h-s}{h} = \frac{s}{a}$$

Valitaan muuttujaksi a . Ratkaistaan yhtälöstä h .

$$a(h-s) = sh$$

Yhtälö kerrottiin ristiin.

$$ah - as = sh$$

$$ah - sh = as$$

$$(a-s)h = as \quad | : (a-s)$$

$$h = \frac{as}{a-s}$$

Pyramidin tilavuus $V = \frac{1}{3}a^2h$ muuttujan a funktiona on

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{as}{a-s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{sa^3}{a-s}.$$

Pyramidin pohjasärmän pituus voi olla mikä tahansa kuution särmän pituutta s suurempi luku. Funktion V määrittelyjoukko on $]s, \infty[$.

Funktion $V(a)$ lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{1}{3}s \frac{a^3}{a-s}$.

Lausekkeessa on muuttujan a lauseke $\frac{a^3}{a-s}$ kerrottuna luvulla $\frac{1}{3}s$.

Koska kertoja $\frac{1}{3}s$ on positiivinen, funktion $V(a)$ arvo on pienin sil-

loin, kun funktion $f(a) = \frac{a^3}{a-s}$ arvo on pienin. Määritetään välin

$]s, \infty[$ kohta, jossa funktio $f(a)$ saa pienimmän arvon.

Laaditaan funktion $f(a)$ kulkukaavio.

Derivoidaan.

$$f'(a) = \frac{3a^2 \cdot (a-s) - a^3 \cdot 1}{(a-s)^2} = \frac{3a^3 - 3sa^2 - a^3}{(a-s)^2} = \frac{2a^3 - 3sa^2}{(a-s)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2a^3 - 3sa^2}{(a-s)^2} = 0$$

$$2a^3 - 3sa^2 = 0$$

$$a^2(2a - 3s) = 0$$

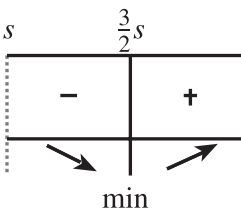
$$a^2 = 0 \text{ tai } 2a - 3s = 0$$

$$a = 0 \text{ tai } a = \frac{3}{2}s$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(a) = \frac{2a^3 - 3sa^2}{(a-s)^2}$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi. Derivaattafunktion nimittäjä $(a-s)^2$ on määrittelyjoukossa positiivinen, joten derivaattafunktion merkin määrää osoittaja $2a^3 - 3sa^2$.

$$a = 2s: 2 \cdot (2s)^3 - 3 \cdot s \cdot (2s)^2 = 16s^3 - 12s^3 = 4s^3 > 0$$

$$a = 1,2s: 2 \cdot (1,2s)^3 - 3 \cdot s \cdot (1,2s)^2 = (2 \cdot 1,2^3 - 3 \cdot 1,2^2)s^3 = -0,864s^3 < 0$$

$$f'(a) = \frac{2a^3 - 3sa^2}{(a-s)^2}$$


$$f(a)$$

Funktion f arvo on pienin, kun $a = \frac{3}{2}s$.

Hukkatilaa jää vähiten, kun pyramidin pohjasärmän pituus on $\frac{3}{2}s$ ja pyramidin korkeus on

$$h = \frac{as}{a-s} = \frac{\frac{3}{2}s \cdot s}{\frac{3}{2}s - s} = \frac{\frac{3}{2}s^2}{\frac{1}{2}s} = 3s.$$

Vastaus

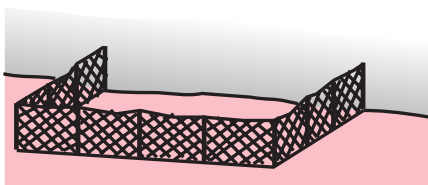
pohjasärämä $\frac{3}{2}s$, korkeus $3s$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

324. Lasketaan positiivisen luvun ja saman luvun käänteisluvun summa. Mikä on summan pienin mahdollinen arvo?

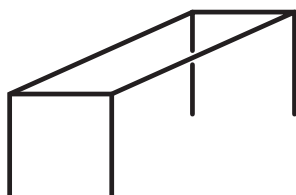
325. Joen rantaan on aidattava $3\,000\text{ m}^2$:n suuruinen suorakulmion muotoinen alue. Määritä alueen mitat niin, että aitauksen kolmeen sivuun tarvitaan mahdollisimman vähän aitaa.



326. Tehtaassa ryhdytään valmistamaan kannetonta litran vetoista suorakulmaisen särmiön muotoista peltiastiaa, jonka pohja on neliön muotoinen. Kuinka astian mitat on valittava, jotta peltiä kuluu mahdollisimman vähän? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

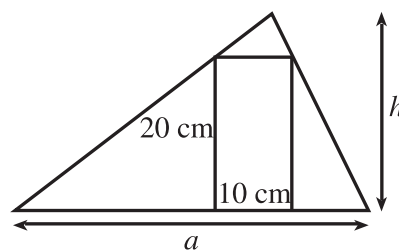
327. Pellistä valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoinen umpinainen $2,5$ desilitran vetoinen säilyketölkki. Suunnittele tölkin mitat niin, että peltiä tarvitaan mahdollisimman vähän. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

328. Vaja, jonka päädyt ovat neliön muotoisia ja jonka tilavuus on 65 m^3 , suunnitellaan tuettavaksi kuvion mukaisella teräspuutkesta rakennettavalla kehikolla. Suunnittele vajan mitat niin, että putkea tarvitaan mahdollisimman vähän.



329. Yritys haluaa ostaa toimitaloaan varten kadun varrella olevan suorakulmion muotoisen tontin. Toimitalon pohja on 490 m^2 :n suuruinen suorakulmio. Rakennuksen on oltava kadun puolella 9 metrin ja muilla puolilla 5 metrin etäisyydellä tontin rajasta, ja rakennuksen seinien on oltava tontin rajojen suuntaiset. Määritä pienimmän mahdollisen tarkoitukseen sopivan tontin mitat ja pinta-ala.

330. Kolmion muotoisesta kankaasta leikataan kuvion mukaisesti suorakulmion muotoinen pala, jonka sivut ovat 20 cm ja 10 cm . Määritä kolmion kannan pituus a ja kolmion korkeus h niin, että hukkapalaa jää mahdollisimman vähän.



331. Suorakulmion kaksi sivua ovat positiivisilla koordinaattiakseleilla, ja origoa vastapäätä oleva suorakulmion kärki on käyrällä $y = \frac{1}{x+1}$.

a) Kuinka suuri suorakulmion pinta-ala voi enintään olla?

b) Käyrä $y = \frac{1}{x+1}$ pyörii x -akselin ympäri, jolloin suorakulmio piirtää suoran ympyrälieriön. Mikä lieriön suurin mahdollinen tilavuus on?

332. Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisija on s ja lieriön korkeus $2s$. Määritä tilavuudeltaan pienin suora ympyräkartio, johon lieriö kokonaan mahtuu. Anna vastaukseksi kartion pohjan halkaisijan pituus ja kartion korkeus.

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

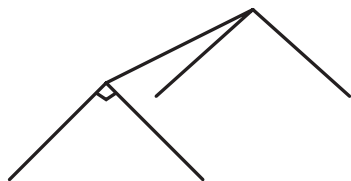
333. Positiivinen luku x ja luvun x neliön käänteisluku lasketaan yhteen. Millä x :n arvolla summan arvo on pienin?

334. On valmistettava suorakulmaisen särmiön muotoinen kannellinen laatikko, jonka pohja on neliön muotoinen ja tilavuus 2 dm^3 . Laatikko tehdään pellistä ja sen pohja tehdään kaksinkertaiseksi. Suunnittele laatikon mitat niin, että peltiä tarvitaan mahdollisimman vähän. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

335. Kesämökille rakennetaan aaltopellistä maapohjainen suorakulmaisen särmiön muotoinen vajarakennus, jonka päätyseinät ovat neliöitä. Rakennuksen tilavuudeksi halutaan $4,5 \text{ m}^3$. Kuinka vajan mitat on valittava, jotta seiniin ja kattoon tarvittavan pellin kokonaismäärä olisi mahdollisimman pieni?

336. Millä pinta-alaltaan saman suuruista suorakulmioista on kaikkein pienin piiri?

337. Kasvihuoneelle, jonka tilavuus on 120 m^3 , valmistetaan kuvion mukainen kehikko teräspuutkesta. Kasvihuoneen päädyt ovat tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita. Suunnittele kasvihuoneen mitat niin, että putkea tarvitaan mahdollisimman vähän.



338. Suorakulmion muotoisen uima-altaan pinta-ala on 600 m^2 . Uima-allas ympäröidään laatoituksella, jonka leveys kummallakin sivulla on 2,0 metriä ja molemmissa päädyissä 3,0 metriä. Määritä uima-altaan mitat niin, että laatoitettava ala on mahdollisimman pieni.

339. Määritä pisteen $(2, 3)$ kautta kulkeva laskeva suora, joka rajaa yhdessä positiivisten koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan mahdollisimman pienen suorakulmaisen kolmion.

340. Suorakulmion kaksi kärkeä ovat x -akselilla ja toiset kaksi käyrällä $y = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

b) Käyrä pyörittää y -akselin ympäri, jolloin suorakulmio piirtää suoran ympyrälieriön. Mikä ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus on?

c) Käyrä pyörittää x -akselin ympäri. Mikä nyt muodostuvan ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus on?

341. Kuution särmän pituus on s . Määritä mitat (pohjan halkaisija ja korkeus) tilavuudeltaan pienimmälle suoralle ympyräkartiolle, johon kuutio mahtuu tahko kartion suuntaisena.

342. a) Mihin paraabelin $y = 4 - x^2$ pisteeseen piirretty tangentti rajaa koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan pienimmän kolmion?

b) Kun paraabeli $y = 4 - x^2$ pyörittää y -akselin ympäri, niin tangentin ja koordinaattiakselien rajaama kolmio piirtää suoran ympyräkartion. Mikä näin muodostuvan ympyräkartion pienin mahdollinen tilavuus on?

343. Säiliö, jonka tilavuus on 1 m^3 , muodostuu suorasta ympyrälieriöstä ja kattona olevasta puolipallosta. Suunnittele lieriön mitat (pohjan säde ja lieriöosan korkeus) niin, että säiliön valmistamiseen kuluu mahdollisimman vähän teräslevyä, kun

- a) säiliön pohja tehdään levystä
- b) säiliö on maapohjainen.

Anna vastaukset millimetrin tarkkuudella.

Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

Rationaalifunktio

Murtolauseke on kahden polynomin osamäärä.

Rationaalifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomien ja murtolausekkeiden summa.

Rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa.

Murtolauseke voidaan joskus sieventää supistamalla. Supistaminen on mahdollista, jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Lauseke $\frac{2}{x+3}$ on murtolauseke.

Funktio $x^3 - \frac{2}{x+3} - \frac{3x}{4x-1}$ on rationaalifunktio.

Funktio $x^3 - \frac{2}{x+3} - \frac{3x}{4x-1}$ ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa -3 ja $\frac{1}{4}$.

Määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{4}\}$. Määrittelyjoukko voidaan myös kuvata antamalla määrittelyehto:

$$x \neq -3 \text{ ja } x \neq \frac{1}{4}.$$

$$\frac{5x}{15x^2 - x} = \frac{\overset{1}{\cancel{5x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}(15x - 1)} = \frac{5}{15x - 1}$$

$$\frac{x+5}{x^2+5x} = \frac{1 \cdot \overset{1}{\cancel{(x+5)}}}{\underset{1}{\cancel{x}}(\cancel{x+5})} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{10x-100}{x^2-100} &= \frac{10(\overset{1}{\cancel{x-10}})}{(x+10)(\underset{1}{\cancel{x-10}})} \\ &= \frac{10}{x+10} \end{aligned}$$

Rationaalilausekkeilla laskettaessa noudatetaan samoja laskusääntöjä kuin murtolukulaskuissa.

Kun lasketaan summa tai erotus, lausekkeet laennetaan ensin samannimisiksi.

Kertolaskussa osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään.

Jakolaskussa jaettava kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1}}^{x-1 \cdot x} &= \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x-1-x(x+1)}{x(x-1)} \\
 &= \frac{x-1-x^2-x}{x(x-1)} = \frac{-1-x^2}{x(x-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x-2}{x} : (2 + \frac{1}{x}) &= \frac{x-2}{x} : \frac{2x+1}{x} \\
 &= \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x}{2x+1} = \frac{(x-2) \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot (2x+1)} \\
 &= \frac{x-2}{2x+1}
 \end{aligned}$$

Funktion raja-arvo

Oletetaan, että funktio f on määritelty kohdan a läheisyydessä kohdan a molemmilla puolilla.

Funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b , jos muuttujan arvojen lähestyessä arvoa a kummalta puolelta tahansa funktion arvot lähestyvät lukua b .

Tällöin merkitään

$$f(x) \rightarrow b, \text{ kun } x \rightarrow a$$

tai

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Funktiolla $\frac{3x^2-5x}{x}$ on raja-arvo kohdassa 0, sillä

$$\frac{3x^2-5x}{x} = \frac{x(3x-5)}{x}$$

$$= 3x - 5 \rightarrow 3 \cdot 0 - 5 = -5, \text{ kun } x \rightarrow 0.$$

Siis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{x} = -5.$$

Jos rationaalifunktio on määritelty kohdassa a , sen raja-arvo kohdassa a on yhtä suuri kuin funktion arvo kohdassa a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Kun tehtävänä on määrittää rationaalifunktion raja-arvo sellaisessa kohdassa a , jossa funktio ei ole määritelty, funktion lauseke pyritään supistamaan muotoon, joka on määritelty kohdassa a .

Oletetaan, että murtolausekkeessa $\frac{P(x)}{S(x)}$ nimittäjänä olevan polynomin $S(x)$ arvo kohdassa a on nolla eli $S(a) = 0$. Välttämätön ehto sille, että funktiolla $\frac{P(x)}{S(x)}$ on raja-arvo kohdassa a , on, että myös $P(a) = 0$. Siis lausekkeen tulee olla kohdassa a ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”.

Funktion jatkuvuus

Rationaalifunktioiden ominaisuutta

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

missä a on mikä tahansa funktion f määrittelyjoukon luku, kutsutaan funktion jatkuvuudeksi.

Polynomifunktio on jatkuva kaikkialla.

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 3x) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x-3} = \frac{4^2}{4-3} = 16$$

Määritetään funktion $\frac{9x^2-4}{3x+2}$

raja-arvo kohdassa $-\frac{2}{3}$:

$$\frac{9x^2-4}{3x+2} = \frac{(3x+2)(3x-2)}{3x+2}$$

$$= 3x-2 \rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = -2 - 2 = -4,$$

$$\text{kun } x \rightarrow -\frac{2}{3}.$$

Funktion $\frac{x+1}{x-2}$ nimittäjän arvo kohdassa 2 on

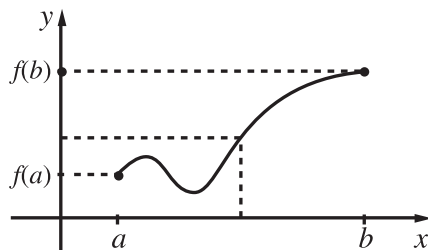
0. Koska osoittajan arvo kohdassa 2 ei ole 0, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

Funktio $f(x) = -x^5 + 7x + 1$ on jatkuva kaikkialla.

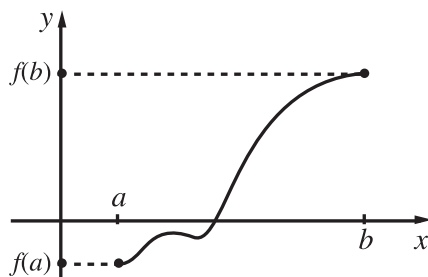
Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Välillä, jolla funktio on jatkuva, funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

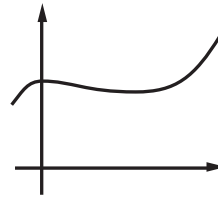
Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, se saa välillä $]a, b[$ ainakin kerran jokaisen arvon, joka on päätepistearvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä.



Erityisesti, jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja päätepistearvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla f on (ainakin yksi) nollakohta välillä $]a, b[$.



Funktio $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



Osoitetaan, että funktio $f(x) = x^3 - 4x + 6$ saa jossain välin $]1, 2[$ kohdassa arvon 5.

Funktion f arvot välin $[1, 2]$ päätepisteissä ovat $f(1) = 3$ ja $f(2) = 6$. Koska luku 5 on päätepistearvojen 3 ja 6 välissä ja koska funktio f on jatkuva välillä $[1, 2]$, funktio f saa jossain välin $]1, 2[$ kohdassa arvon 5.

Osoitetaan, että yhtälöllä $x^4 = 2x^3 + 15$ on juuri välillä $]2, 3[$.

Yhtälö $x^4 = 2x^3 + 15$ on yhtäpitävä yhtälön $x^4 - 2x^3 - 15 = 0$ kanssa, joten yhtälön juuret ovat funktion $f(x) = x^4 - 2x^3 - 15$ nollakohtia. Koska arvot $f(2) = -15$ ja $f(3) = 12$ ovat erimerkkiset ja koska funktio f on jatkuva välillä $[2, 3]$, funktiolla f on nollakohta välillä $]2, 3[$.

Derivaatta

Havainnollisesti määriteltynä funktio f on derivoituva kohdassa a , jos funktion f kuvaajalle voidaan piirtää muuttujan arvon a kohdalle yksikäsitteinen tangentti, joka ei ole pystysuora. Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa a . Derivaatta merkitään $f'(a)$.

Derivaatta (tangentin kulmakerroin) ilmaisee funktion arvojen kasvunopeuden.

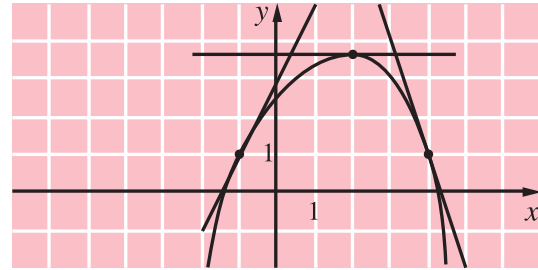
Funktion f derivaatta kohdassa a määritellään täsmällisesti erotusosamäärän raja-arvona.

Funktion f erotusosamäärä kohdassa a on

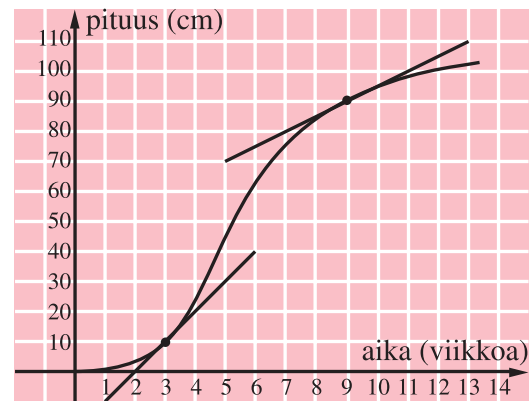
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Funktion f derivaatta kohdassa a on erotusosamäärän raja-arvo kohdassa a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Kuviossa on erään funktion f kuvaaja. Kuvion perusteella funktion f derivaatta kohdassa -1 on noin 2 , eli $f'(-1) \approx 2$. Kuvan mukaan on edelleen $f'(2) = 0$ ja $f'(4) \approx -3$.



Käyrä kuvaa viljakasvin kasvua. Kasvunopeus kolmen viikon kuluttua taimen puhkeamisesta on noin 10 cm/viikko ja yhdeksän viikon kuluttua noin 5 cm/viikko .

Muodostetaan funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ erotusosamäärä kohdassa 0 .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x^2 + 2x + 1) - 1}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

Jos $f(x) = x^2 + 2x + 1$, niin

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Derivaatafunktio

Funktion f derivaatafunktion f' arvo on funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa, jossa funktio f on derivoituva. Derivaatafunktiota f' voidaan merkitä myös derivointimerkin D avulla:

$$f' = Df.$$

Vakiofunktion derivaatafunktioksi on vakiofunktion 0 .

Potenssifunktio x^n derivoidaan (derivaatafunktioksi muodostetaan) kaavalla

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Koska funktioiden summan derivaatta on derivaattojen summa

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x),$$

ja koska vakiolla kerrotun funktion derivaatta on funktion derivaatta kerrottuna samalla vakiolla

$$D(kf(x)) = kDf(x),$$

niin polynomifunktio voidaan derivoida termeittäin käyttäen hyväksi vakiofunktion ja potenssifunktioiden derivointisääntöjä.

Derivaatta kohdassa a saadaan sijoittamalla muuttujan arvo a derivaatafunktion lausekkeeseen.

$$D(-5) = 0, \quad D\sqrt{3} = 0$$

$$Dx = 1, \quad Dx^7 = 7x^6$$

$$D(x^8 + x^3 - 5) = 8x^7 + 3x^2 - 0 = 8x^7 + 3x^2$$

$$D\left(-\frac{5}{6}x^3\right) = -\frac{5}{6}Dx^3 = -\frac{5}{6} \cdot 3x^2 = -\frac{5}{2}x^2$$

$$D(6x^4 - 4x + 7) = 6 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 1 + 0 = 24x^3 - 4$$

Oletetaan, että ilmapallon säde alussa on 0 ja että säde kasvaa yhden senttimetrin sekunnissa. t sekunnin kuluttua ilmapallon tilavuus on

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi t^3. \text{ Pallon tilavuuden kasvunopeus on}$$

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3t^2 = 4\pi t^2,$$

joten esimerkiksi 12 sekunnin kuluttua pallon tilavuus kasvaa nopeudella

$$V'(12) = 4\pi \cdot 12^2 \approx 1\,800 \text{ (cm}^3\text{/s)}.$$

Käyrän tangentti

Funktion f kuvaajalle muuttujan arvon a kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion derivaatta $f'(a)$.

Tangentin yhtälö muodostetaan suoran yhtälön kaavalla

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Suorien kohtisuoruusehdon $k_1 k_2 = -1$ perusteella funktion f kuvaajalle muuttujan arvon a kohdalle piirretyn normaalin kulmakerroin on tangentin kulmakertoimen $f'(a)$ käänteisluvun vastaluku $-\frac{1}{f'(a)}$.

Funktion $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ kuvaajalle pisteeseen $(3, 6)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa 3.

Koska $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$, niin kulmakerroin on

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 8 = 5.$$

Tangentin yhtälö on:

$$y - 6 = 5(x - 3)$$

$$y = 5x - 9.$$

Funktion $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ kuvaajalle pisteeseen $(3, 6)$ piirretyn normaalin kulmakerroin on tangentin kulmakertoimen 5 käänteisluvun vastaluku $-\frac{1}{5}$.

Funktion kulku

Funktio f on aidosti kasvava lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvojen suuretessa myös funktion arvot suurenevät eli:

jos $x_2 > x_1$, niin $f(x_2) > f(x_1)$.

Jos jollain välillä pätee:

$f'(x) \geq 0$ kaikissa välin pisteissä ja

$f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä,

niin funktio f on tällä välillä aidosti kasvava.

Funktio on aidosti vähenevä lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvojen suuretessa funktion arvot pienenevät eli:

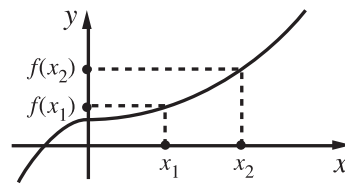
jos $x_2 > x_1$, niin $f(x_2) < f(x_1)$.

Jos jollain välillä pätee:

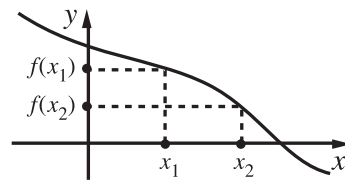
$f'(x) \leq 0$ kaikissa välin pisteissä ja

$f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä,

niin funktio f on tällä välillä aidosti vähenevä.



Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ derivaattafunktio on $f'(x) = x^2$. Derivaattafunktiolla on nollakohta 0 ja kaikkialla muualla derivaattafunktion arvot ovat positiivisia. Funktio f on kaikkialla aidosti kasvava.



Funktion $g(x) = -x^5 - x^3 - 2x + 3$ derivaattafunktio $g'(x) = -5x^4 - 3x^2 - 2$ on kaikkialla negatiivinen, sillä derivaattafunktiossa on vain parillisia potensseja ja negatiivisia kertoimia. Funktio g on kaikkialla aidosti vähenevä.

Funktion kulku (kasvaminen ja väheneminen) voidaan selvittää tutkimalla derivaattafunktion merkkiä.

Tutkitaan, missä funktio

$$f(x) = x^5 + 540x^2 - 100$$

on kasvava ja missä vähenevä.

$$\text{Derivoidaan: } f'(x) = 5x^4 + 1080x$$

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, joten ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$5x^4 + 1080x = 0$$

$$5x(x^3 + 216) = 0$$

$$5x = 0 \text{ tai } x^3 + 216 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \sqrt[3]{-216} = -6$$

Laaditaan derivaattafunktion

$f'(x) = 5x^4 + 1080x$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi. Derivaattafunktion f' merkki perustellaan laskemalla yksi funktion arvo jokaisesta merkkikaavion lokeroista.

$$f'(-10) = 39\,200 > 0$$

$$f'(-1) = -1075 < 0$$

$$f'(1) = 1085 > 0$$

$$f'(x) = 5x^4 + 1080x$$

$$f(x)$$

-6		0	
+	-	+	
			
	max	min	

Kulkukaavion mukaan funktio f on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -6]$ ja $[0, \infty[$ ja aidosti vähenevä välillä $[-6, 0]$.

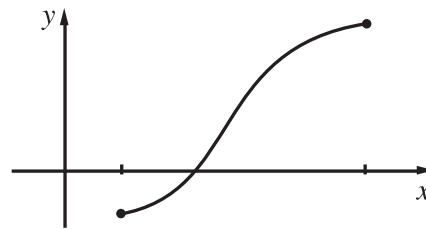
Kohdat, joissa funktio vaihtuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi (tai päinvastoin), ovat funktion ääriarvokohtia. Ääriarvokohdat ovat joko maksimi- tai minimikohtia. Funktion arvot ääriarvokohdissa ovat funktion ääriarvoja (maksimi- tai minimiarvoja).

Jos funktio f on jollain välillä aidosti monotoninen (aidosti kasvava tai aidosti vähenevä), se saa tällä välillä jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa.

Erityisesti, jos funktio f on jollain välillä aidosti monotoninen, sillä on tällä välillä enintään yksi nollakohta.

Edellä laaditun kulkukaavion perusteella funktiolla $f(x) = x^5 + 540x^2 - 100$ on maksimikohta -6 ja minimikohta 0 .

Funktiolla f on maksimiarvo $f(-6) = 11\,564$ ja minimiarvo $f(0) = -100$.



Edellä osoitettiin, että funktio

$g(x) = -x^5 - x^3 - 2x + 3$ on kaikkialla aidosti vähenevä. Siis funktiolla g on korkeintaan yksi nollakohta. Koska funktion arvot $g(0) = 3$ ja $g(1) = -1$ ovat erimerkkiset, funktiolla g on nollakohta välillä $]0, 1[$. Siis funktiolla g on tasan yksi nollakohta.

Polynomifunktion suurin ja pienin arvo

Polynomifunktion kulun lukusuoran äärilaidoilla määrää funktion lausekkeen korkeimman asteen termi. Polynomifunktion saamien arvojen joukossa ei välttämättä ole suurinta tai pienintä.

Kohta, jossa funktio saa jollain välillä suurimman (pienimmän) arvon, päätellään rajaamalla funktion kulkukaavio tälle välille.

Funktion $f(x) = x^5 + 540x^2 - 100$ kulun lukusuoran äärilaidoilla määrää termi x^5 . Kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, funktion f arvot suurenevat rajatta. Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, funktion f arvot pienenevät rajatta. Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

Määritetään funktion

$f(x) = x^5 + 540x^2 - 100$ pienin arvo välillä $[-8, \infty[$.

Rajataan edellä laadittu funktion f kulkukaavio välille $[-8, \infty[$.

	-8	-6	0
$f'(x) = 5x^4 + 1080x$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗
		max	min

Funktion f pienin arvo välillä $[-8, \infty[$ on joko $f(-8)$ tai $f(0)$.

Lasketaan kumpikin arvo:

$$f(-8) = 1692$$

$$f(0) = -100$$

Funktion f pienin arvo välillä $[-8, \infty[$ on -100 .

Väliä, joka sisältää molemmat päätepisteensä eli joka on muotoa $[a, b]$, kutsutaan suljetuksi väliksi. Jos tehtävänä on määrittää funktion suurin (pienin) arvo suljetulla välillä $[a, b]$, kulkukaaviota ei välttämättä tarvita. Derivoituva funktio saa välillä $[a, b]$ suurimman (pienimmän) arvon joko välillä $]a, b[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa tai jommassakummassa välin päätepisteistä a ja b .

Määritetään välin $[2, 3]$ kohta, jossa funktio $g(x) = x^4 - 12x^2$ saa suurimman arvon.

Derivoidaan: $g'(x) = 4x^3 - 24x$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x^3 - 24x = 0$$

$$4x(x^2 - 6) = 0$$

$$4x = 0 \text{ tai } x^2 - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 = 6$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \sqrt{6} \approx 2,4 \text{ tai } x = -\sqrt{6}$$

Välillä $]2, 3[$ on derivaattafunktion nollakohta $\sqrt{6}$. Lasketaan funktion $g(x) = x^4 - 12x^2$ arvo kohdassa $\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} g(\sqrt{6}) &= (\sqrt{6})^4 - 12(\sqrt{6})^2 = 36 - 12 \cdot 6 \\ &= -36 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion g arvo välin $[2, 3]$ päätepisteissä 2 ja 3.

$$g(2) = 2^4 - 12 \cdot 2^2 = -32$$

$$g(3) = 3^4 - 12 \cdot 3^2 = -27$$

Lasketuista arvoista suurin on arvo $g(3)$.

Funktio g saa välillä $[2, 3]$ suurimman arvon kohdassa 3.

Funktioiden tulon ja potenssin derivaatta

Kahden derivoituvan funktion f ja g tulofunktio fg derivoidaan kaavalla

$$D(fg) = f'g + fg'.$$

Tulon derivointikaavasta voidaan johtaa funktion potenssin derivointikaava

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x),$$

missä n on positiivinen kokonaisluku.

Funktion $h(x) = x^3g(x)$ derivaatafunkti on

$$h'(x) = 3x^2g(x) + x^3g'(x).$$

$$D(1 - 5x^2)^3 = 3(1 - 5x^2)^2 \cdot D(1 - 5x^2)$$

$$= 3(1 - 5x^2)^2 \cdot (-10x) = -30x(1 - 5x^2)^2$$

Funktio $f(x) = x(x^2 + 1)^4$ derivoidaan käyttämällä funktioiden tulon ja funktion potenssin derivointikaavoja.

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + 1)^4 + x \cdot 4(x^2 + 1)^3 \cdot 2x$$

$$= (x^2 + 1)^4 + 8x^2(x^2 + 1)^3$$

Funktioiden osamäärän derivaatta

Kahden derivoituvan funktion f ja g osamäärä derivoidaan kaavalla

$$D \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Osamäärän derivointikaavasta voidaan johtaa potenssifunktion derivointikaavan ja funktion potenssin derivointikaavojen yleistykset.

$$Dx^n = nx^{n-1}, \quad n \text{ kokonaisluku}$$

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x), \quad n \text{ kokonaisluku}$$

$$\begin{aligned} D \frac{x^2}{3x-1} &= \frac{2x \cdot (3x-1) - x^2 \cdot 3}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) &= D\left(3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 3 Dx^{-1} - Dx^{-2} = 3 \cdot (-1 \cdot x^{-2}) - (-2 \cdot x^{-3}) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \frac{1}{(1-5x^2)^3} &= D(1-5x^2)^{-3} \\ &= -3(1-5x^2)^{-4} \cdot D(1-5x^2) \\ &= -3(1-5x^2)^{-4} \cdot (-10x) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{(1-5x^2)^4} \cdot (-10x) \\ &= \frac{30x}{(1-5x^2)^4} \end{aligned}$$

Rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö

Rationaalifunktioita tutkittaessa tarvitaan taitoa ratkaista rationaaliyhtälöitä ja -epäyhtälöitä.

Rationaaliyhtälö voidaan ratkaista niin, että yhtälö kerrotaan lausekkeella, joka supistaa nimittäjät pois.

Ratkaistaan yhtälö

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x+3}.$$

Määrittelyehto: $x \neq 0$ ja $x \neq -3$.

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x+3} \quad | \cdot x(x+3)$$

$$x(x+3) - \frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}} = \frac{x \cdot x \cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$

$$x(x+3) - (x+3) = x^2$$

$$x^2 + 3x - x - 3 = x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Luku $\frac{3}{2}$ täyttää määrittelyehdon.

Vastaus: $x = \frac{3}{2}$

Toinen tapa ratkaista rationaaliyhtälö on sieventää yhtälön molemmille puolille samannimiset murtolausekkeet, minkä jälkeen osoittajat voidaan merkitä yhtä suuriksi tai yhtälö voidaan kertoa yhteisellä nimittäjällä.

Rationaalifunktion arvojen merkki voi vaihtua kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty, ja funktion nollakohdissa.

Merkkikaavioon merkitään kohdat, joissa merkki voi vaihtua, ja lasketaan yksi funktion arvo jokaiselta osaväliltä.

Rationaaliepäyhtälö ratkaistaan niin, että ensin yhtälön termit siirretään vasemmalle puolelle niin, että oikealle puolelle tulee 0. Sen jälkeen tutkitaan vasemmalle puolelle muodostuvan rationaalifunktion merkit.

Tutkitaan, millä väleillä funktion $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ arvot ovat negatiivisia.

Funktio f ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa 1. Funktion f nollakohta on osoittajan nollakohta -4 .

$$f(-5) = \frac{1}{6} > 0$$

$$f(0) = -4 < 0$$

$$f(2) = 6 > 0$$

	-4	1	
+		-	
		+	

Funktion f arvot ovat negatiivisia, kun $-4 < x < 1$.

Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{5x}{x-1} \geq 4$.

$$\frac{5x}{x-1} \geq 4$$

$$\frac{5x}{x-1} - 4 \geq 0$$

$$\frac{5x - 4(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x+4}{x-1} \geq 0$$

Edellä laaditun merkkikaavion mukaan funktion $\frac{x+4}{x-1}$ arvot ovat positiivisia, kun $x < -4$

tai $x > 1$. Epäyhtälö $\frac{x+4}{x-1} \geq 0$ toteutuu myös nollakohdassa -4 .

Epäyhtälön ratkaisu on: $x \leq -4$ tai $x > 1$.

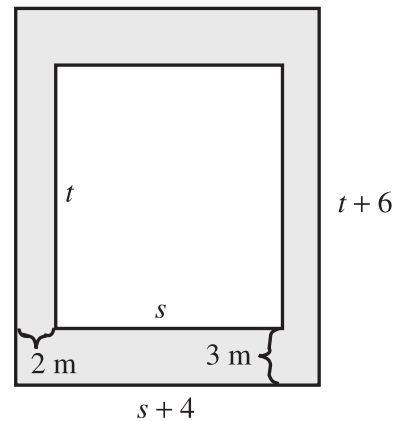
Rationaalifunktioiden sovelluksia

Sovellustilanteessa, jossa on tutkittava jonkin suureen suurinta tai pienintä arvoa, on selvitetävä, mistä muuttujasta ja millä tavalla suure riippuu.

Jos muuttujia on useampia, niin annettujen tietojen perusteella päätellään niiden välinen yhteys.

Tutkittava suure ilmaistaan yhden muuttujan funktiona.

Suorakulmion muotoisen uima-altaan pinta-alaksi on päätetty 600 m^2 . Uima-allas ympäröidään laatoituksella, jonka leveys kummallakin sivulla on $2,0$ metriä ja molemmissa päädyissä $3,0$ metriä. Määritetään uima-altaan mitat niin, että laatoitettavan alueen pinta-ala on mahdollisimman pieni.



Jos altaan leveys (päätyisivujen pituus) on s metriä ja altaan pituus t , niin laatoitettavan alueen pinta-ala on

$$A = (s + 4)(t + 6) - 600.$$

Koska $st = 600$, niin $s = \frac{600}{t}$.

Laatoitettavan alueen pinta-ala muuttujan t funktiona on

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(\frac{600}{t} + 4\right)(t + 6) - 600 \\ &= 600 + \frac{3600}{t} + 4t + 24 - 600 \\ &= \frac{3600}{t} + 4t + 24 \\ &= 3600 \cdot t^{-1} + 4t + 24. \end{aligned}$$

Funktion määrittelyjoukko päätellään sovellustilanteesta.

Mahdollisia muuttujan t arvoja ovat kaikki positiiviset luvut.

Tutkitaan, missä kohdassa välillä $]0, \infty[$ funktion $A(t)$ arvo on pienin.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} A'(t) &= 3600 \cdot (-1) \cdot t^{-2} + 4 = -\frac{3600}{t^2} + 4 \\ &= \frac{-3600 + 4t^2}{t^2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-3600 + 4t^2}{t^2} = 0$$

$$-3600 + 4t^2 = 0$$

$$4t^2 = 3\,600$$

$$t^2 = 900$$

$$t = 30 \text{ tai } t = -30$$

Funktion $A(t)$ määrittelyjoukossa $]0, \infty[$ on derivaattafunktion nollakohta 30.

Laaditaan derivaattafunktion $A'(t)$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $A(t)$ kulkukaavioksi.

Koska derivaattafunktion

$$A'(t) = \frac{-3600 + 4t^2}{t^2}$$

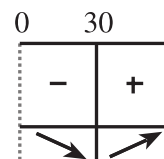
nimittäjä t^2 on positiivinen, derivaattafunktion merkin määrää osoittaja $-3600 + 4t^2$.

$$t = 20: \quad -3600 + 4 \cdot 20^2 = -2000 < 0$$

$$t = 40: \quad -3600 + 4 \cdot 40^2 = 2800 > 0$$

$$A'(t) = \frac{-3600 + 4t^2}{t^2}$$

$A(t)$



Kulkukaavion mukaan funktion $A(t)$ arvo on pienin, kun $t = 30$. Tällöin

$$s = \frac{600}{t} = \frac{600}{30} = 20.$$

Laatoitettavan alueen pinta-ala on pienin, kun altaan leveys on 20 m ja pituus 30 m.

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

RATIONAALIFUNKTIO

344. Mikä funktion määrittelyjoukko on?

- a) $\frac{1}{x} - \frac{x-2}{2+x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-4}$
 c) $\frac{x+1}{x^2+4}$ d) $\frac{x+1}{(x+4)^2}$

345. Supista, jos mahdollista.

- a) $\frac{3x^2}{5x^2+x}$ b) $\frac{6x+9}{2x+3}$
 c) $\frac{x-1}{5-5x}$ d) $\frac{x^2-x}{3x-3}$

346. Supista, jos mahdollista.

- a) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ b) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$
 c) $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

347. Mikä funktion $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-4x}$ määrittelyjoukko on? Supista funktion lauseke. Mikä on supistetun lausekkeen määrittelemän funktion määrittelyjoukko?

348. Saata murtolausekkeeksi.

- a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$ b) $\frac{1}{x} - 3x$
 c) $\frac{1-t}{t} - \frac{1-t}{t^2}$

349. Saata murtolausekkeeksi.

- a) $\frac{3}{t-3} - 1$ b) $\frac{2}{t-3} - \frac{1}{t+1}$
 c) $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{t}{1-t} - \frac{1+t}{(1-t)^2}$

350. Laske.

- a) $\frac{x^2}{x+3} \cdot (1 + \frac{3}{x})$ b) $\frac{x^2}{x+3} : (1 + \frac{3}{x})$

351. Laske.

- a) $(x - \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x-1}$ b) $(1-x) : (1 - \frac{1}{x})$
 c) $(x - \frac{1}{x}) : (1-x)$

FUNKTION RAJA-ARVO

352. Määritä funktion raja-arvo kohdassa 0.

- a) $\frac{3x-2}{5x-6}$ b) $\frac{x^2+6x}{3x}$ c) $\frac{3+x}{x}$

353. Määritä.

- a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-12}{3x^2+6x}$

354. Määritä.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\frac{1}{x+1} - 1)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3} (1 - \frac{3}{x}) : (x-3)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} (\frac{1}{x^2} - 1)$

FUNKTION JATKUVUUS

355. Osoita, että funktio $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6$ saa jossakin välin $]1, 2[$ kohdassa arvon -50 .

356. a) Osoita, että yhtälöllä $x^5 = 200x^3 + 80$ on juuri välillä $]14, 15[$.

b) Voidaan osoittaa, että yhtälöllä $x^5 = 200x^3 + 80$ on vain yksi juuri välillä $]14, 15[$. Määritä juuren likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

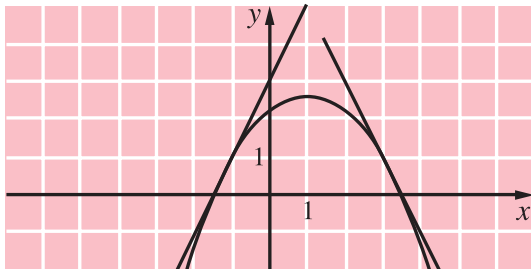
357. Funktiolle f on $f(x) = \frac{x^2 - 9}{6x - 18}$, kun $x \neq 3$. Määrittele arvo $f(3)$ niin, että funktio f on jatkuva kohdassa 3 .

358. Ilmaise funktio $f(x) = |2x + 3|$ ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja. Onko funktio f jatkuva?

DERIVAATTA

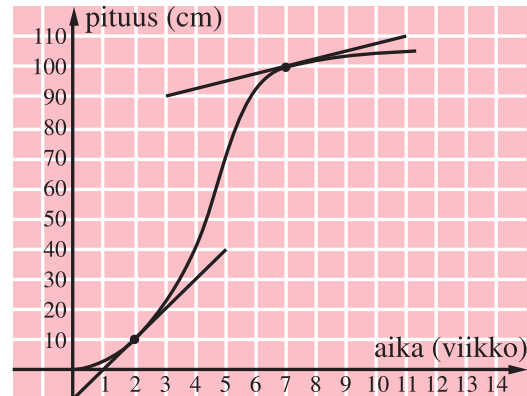
359. Päättele funktion f kuvaajasta ja kuvaajalle piirretystä tangenteista

- funktion arvo $f(3)$
- derivaatat $f'(-1)$, $f'(1)$ ja $f'(3)$
- millä muuttujan x arvoilla on $f'(x) > 0$.

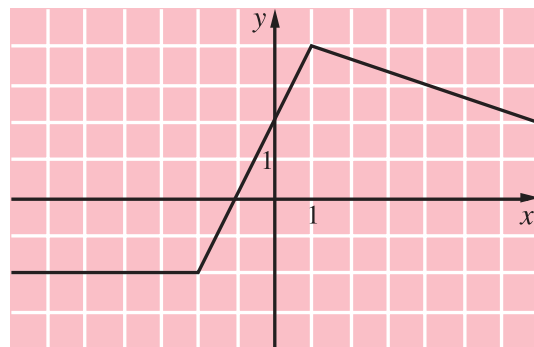


360. Päättele kuvaajasta:

- Millä nopeudella kasvi kasvaa kahden ja seitsemän viikon kuluttua taimen puhkeamisesta?
- Kuinka monen viikon kuluttua kasvu on nopeinta? Mikä kasvunopeus silloin on?



361. Funktion f kuvaaja muodostuu janasta ja kahdesta puolisuorasta. Päättele kuvaajasta, missä kohdissa funktio f ei ole derivoituva. Mikä funktion f derivaatta on muissa kohdissa?



362. Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, ja funktio f on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Lisäksi tiedetään, että $f(-3) = 1$ ja että $f'(x) = \frac{1}{2}$, kun $x < 3$, ja $f'(x) = 0$, kun $x > 3$.

Mikä funktion arvo $f(9)$ on?

363. Määritä erotusosamäärän raja-arvona funktion derivaatta kohdassa 3 .

- $f(x) = x^2 + 7$
- $g(x) = \frac{6}{x}$

DERIVAATTAFUNKTIO

364. Laske $f(-1)$ ja $f'(-1)$,
kun $f(x) = x^{1999} - x^{1996}$.

365. Määritä.

a) $D(\frac{5x^8}{6})$ b) $D\sqrt{7}$

c) $D(\frac{3x^4 - x^2}{12})$

366. Ilmapallon säde kasvaa senttimetrin sekunnissa. Oletetaan, että säde alussa on 0.

Millä nopeudella pallon pinta-ala kasvaa

a) viiden sekunnin b) 15 sekunnin kuluttua?
(Pallon pinta-ala on $A = 4\pi r^2$, missä r on säde.)

KÄYRÄN TANGENTTI

367. Määritä käyrälle $y = -x^3 + 3x^2 - 7$ muutujan arvon -1 kohdalle piirretyn a) tangentin
b) normaalin yhtälö.

368. Osoita, että funktion

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ kuvaajalla on yksi piste,
johon piirretty kuvaajan tangentti on suoran

$y = -\frac{4}{3}x + 1$ suuntainen.

369. Missä pisteessä paraabelin

$y = -0,5x^2 + 5x$ huippu on?

370. Määritä vakio a niin, että paraabelin

$y = x^2 - 6x + a$ huippu on suoralla $y = 4$.

371. Missä kulmassa käyrä $y = x^5 - 1$ leikkaa x -akselin? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

372. Osoita, että funktioiden $f(x) = x^3 + x^2 + 5$
ja $g(x) = x^3 + 2x + 4$ kuvaajat sivuavat toisiaan.

FUNKTION KULKU

373. Osoita, että

a) funktio $g(x) = x^5 + 15x^3$ on kaikkialla aidosti kasvava

b) funktio $h(x) = -3x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ on kaikkialla aidosti vähenevä.

374. Tiedetään, että $f'(x) = x^2 - 6x + 5$. Kumpi funktion f arvoista $f(3)$ ja $f(4)$ on suurempi?

375. a) Missä funktio

$f(x) = -x^2 - 112x - 3000$ on kasvava ja missä vähenevä?

b) Määritä funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot.

376. Missä funktio $f(x) = x^3 - 15x^5$ on kasvava ja missä se on vähenevä? Määritä funktion f ääriarvokohdat.

377. Kuinka monta juurta yhtälöllä
 $x^8 = 8x + 1000$ on?

378. Funktiolla $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + a$ on maksimiarvo 10. Mikä funktion f minimiarvo on?

POLYNOMIFUNKTION SUURIN JA PIENIN ARVO

379. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 12x + 20$

a) suurin ja pienin arvo

b) arvojoukko.

380. Mikä on pienin arvo, jonka funktio

$f(x) = -x^3 + 300x - 1000$ saa välillä

a) $]-\infty, 8]$ b) $]-\infty, 19]$

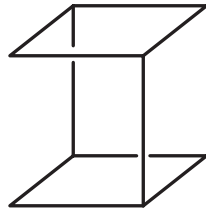
381. Määritä funktion $f(x) = x^3 - x$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, \frac{1}{2}]$.

382. Osoita, että kaikilla muuttujan x arvoilla on $x^4 + 10x^2 \geq 8x^3 - 125$.

383. Millä vakion a arvolla funktion $f(x) = x^3 - 75x + a$ suurin arvo välillä $[-9, 9]$ on 10?

384. Minkä positiivisen luvun neliö on eniten saman luvun kuutiota suurempi?

385. Rautalangasta, jonka pituus on 36 cm, taivutetaan kuvion mukainen kehikko neliöpohjaiselle suoralle särmiölle. Määritä kehikon pohjäsärmän pituus ja korkeus niin, että särmiön tilavuus on mahdollisimman suuri.



386. Käytävissäsi on 160 cm rautalankaa. Rautalangasta tehdään neliöpohjaisen suorakulmion särmiön muotoisen lampunvarjostimen särmät. Suunnittele lampunvarjostimen mitat niin, että varjostimen vaipan ja yläpohjan yhteenlaskettu pinta-ala on mahdollisimman suuri. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

387. Ranta-alueella on 30 lomamökkiä, joiden viikkovuokra on 420 euroa. Jos mökkejä rakennetaan lisää, viihtyisyys huononee ja kaikkien mökkien vuokraa joudutaan laskemaan. Jokainen uusi mökki vähentää viikkovuokraa 10 euroa. Mikä mökkien lukumäärä johtaa mahdollisimman suuriin tuloihin? Kuinka suuret viikon vuokratulot tällöin ovat?

388. Neliön muotoisen pahvilevyn sivu on 30 cm. Neliön jokaisesta nurkasta leikataan yhtä suuret neliön muotoiset palat ja levystä tehdään kanneton laatikko taittamalla sivut ylös. Laatikon tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi. Kuinka pitkä pois leikattavan neliön sivun tulee olla?

389. Jos lentoyhtiöiden käsimatkatavarasääntöä (tehtävä 234) sovelletaan suoran ympyrälieriön muotoiseen matkatavaraan, sääntö kuulostaa seuraavalta: Jos pohjan halkaisija kerrotaan kahdella ja tuloon lisätään lieriön korkeus, niin summa ei saa ylittää 115 senttimetriä. Suunnittele mitat mahdollisimman tilavalle suoran ympyrälieriön muotoiselle käsimatkatavaralle.

390. Suorakulmion kaksi sivua on positiivisilla koordinaattiakseleilla, ja origoa vastapäätä oleva kärki on käyrällä $y = 1 - 2x^3$. Mikä on suorakulmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo?

FUNKTIOIDEN TULON JA POTENSIN DERIVAATTA

391. Oletetaan, että funktio f on kaikkialla derivoituva.

a) Derivoi funktio $h(x) = xf(x)$.

b) Määritä $h'(-1)$, kun $f(-1) = 3$ ja $f'(-1) = 5$.

392. Derivoi funktio.

a) $(5x - 1)^3$ b) $(1 - x)^5$ c) $(x^2 - 3)^5$

393. a) Derivoi funktio

$f(x) = (3x + 1)^2(4x - 1)^2$.

b) Määritä funktion f derivaattafunktion nollakohdat.

FUNKTIOIDEN OSAMÄÄRÄN DERIVAATTA

394. Derivoi funktio ja määritä derivaattafunktion nollakohdat.

a) $\frac{x}{3x + 1}$ b) $\frac{4x}{x^2 + 4}$

395. Derivoi.

a) $-\frac{3}{2x}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3}$ c) $(x - \frac{1}{x^2})^2$

396. Derivoi.

a) $\frac{3}{(2x-1)^5}$ b) $\frac{1}{6(1-x^2)^3}$

c) $\frac{1}{1-x^2}$

397. Mihin käyrän $y = \frac{4}{x+3}$ pisteeseen piirretty käyrän tangentti on suoran $y = -x$ suuntainen?

RATIONAALIYHTÄLÖ JA -EPÄYHTÄLÖ

398. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = 0$

b) $\frac{6}{x} + \frac{3}{x+2} = 2$

399. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x+1}$

b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = 3$

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2} = -1$

400. Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

a) $\frac{x-3}{x}$ b) $1 + \frac{2}{x+3}$

401. Ratkaise epäyhtälö.

a) $\frac{3x-5}{x+1} > 1$ b) $\frac{x}{x+1} < 1$

c) $\frac{x^2}{x-1} \geq 2x$

402. Ratkaise epäyhtälö.

a) $\frac{4}{x^2} \geq \frac{3}{x}$ b) $\frac{3x}{x^2+2} \leq 1$

403. Tutki, millä väleillä funktio

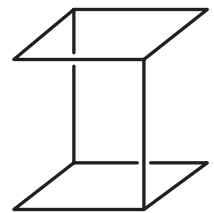
$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}$ on kasvava ja millä väleillä vähenevä, ja määritä funktion ääriarvot.

404. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

RATIONAALIFUNKTIIDEN SOVELLUKSIA

405. Suorakulmaisen särmiön muotoinen neliöpohjainen kotelo, jonka tilavuus on

30 dm^3 , tuetaan kuvion mukaisella teräslangasta valmistetulla kehikolla. Määritä kotelon mitat niin, että teräslankaa tarvitaan mahdollisimman vähän. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.



406. Pellistä valmistetaan umpinainen litran vetoinen suoran ympyrälieriön muotoinen tölkki, jonka molemmat pohjat tehdään kaksinkertaisiksi. Määritä tölkin mitat niin, että peltiä tarvitaan mahdollisimman vähän.

407. Paperiarkin pinta-ala on 500 cm^2 . Kirjoitettaessa jätetään ylös ja alas $2,0 \text{ cm:n}$ marginaalit, vasempaan laitaan $3,0 \text{ cm:n}$ ja oikeaan laitaan $2,0 \text{ cm:n}$ marginaali. Määritä arkin mitat niin, että kirjoitusala on mahdollisimman suuri.

TEHTÄVÄSARJOJA

SARJA A

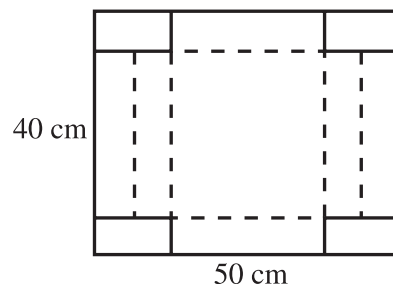
1. Ratkaise epäyhtälö $\frac{3x+5}{x+1} < 2$.
2. Osoita, että yhtälöllä $x^9 + x^7 - 1 = 0$ on juuri, jonka kolmedesimaalinen likiarvo on 0,917, ja että yhtälöllä ei ole muita juuria.
3. Suorakulmaisen särmiön muotoisen katoksen neliön muotoiset päädyt, katto ja toinen sivuseinä rakennetaan aaltopellistä. Peltiä on käytettävissä 40 m^2 . Määritä vajan mitat niin, että sen tilavuus on mahdollisimman suuri. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.
4. Kahden kadun kulmaukseen rajattavan suorakulmion muotoisen tontin pinta-alaksi on määrätty $1\,200 \text{ m}^2$. Rakennuskieltoalue ulottuu 10 metrin päähän pääkadusta ja 5 metrin päähän sivukadusta. Määritä tontin mitat niin, että jäljelle jäävä rakentamiskelpoinen alue on mahdollisimman suuri.
5. Osoita, että funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 5}$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.
6. Käyrälle $y = x^3$ pisteeseen (a, a^3) , missä $a \neq 0$, piirretty tangentti ja normaali rajaavat yhdessä y -akselin kanssa kolmion. Mitä raja-arvoa kolmion pinta-ala lähenee, kun a lähenee nollaa?

SARJA B

1. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$.
2. Jos kappale singotaan Kuun pinnalta vinosti ylöspäin 45° :n kulmassa, kappaleen lentorata noudattaa paraabelia $y = x - \frac{1,6}{v^2}x^2$, missä v on lähtönopeus (m/s). Heittopaikka on origossa ja yksikkönä on metri. Kuinka korkealla lähtönopeudella 20 m/s heitetty höyhen käy?
3. Matti on varannut muutaman vaollisen varhaisperunoistaan myytäväksi kylän kesätorilla. Nostettuaan joitakin varsia muista vaoista hän laski, että myytäviä perunoita on 120 kg. Hän arvioi, että perunaerän paino lisääntyy kahdeksalla kilogrammalla vuorokaudessa. Päivän hinta kesätorilla on 6,20 euroa kilolta, ja kilohinta laskee 20 senttiä joka päivä. Kuinka monen päivän kuluttua Matin kannattaa kaivaa perunat maasta ja myydä ne torilla?
4. Osoita, että funktion $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 3$ kuvaajalle muuttujan arvon 1 kohdalle piirretty tangentti on myös funktion f kuvaajan normaali.
5. Osoita, että kaikilla muuttujan x arvoilla on $(x+1)^4 \geq \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$.
6. Polynomifunktiosta f tiedetään, että sen derivaatta kohdassa 1 on positiivinen ja että $f''(x) = x^3 + x^2 - 2$. Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on?

SARJA C

1. Olkoon $f(x) = x^2 - 6x + 14$. Mikä on
 a) funktion f pienin arvo
 b) funktion $\frac{1}{f}$ suurin arvo?
2. Tautiepidemian kulun ennustamiseen käytettiin seuraavaa matemaattista mallia: Kun taudin leviämisen alkamisesta on kulunut x vuorokautta, sairastavien osuus prosentteina koko kaupungin väestöstä on $f(x) = -0,02x^3 + 0,36x^2$.
 a) Kuinka monta vuorokautta kestää, ennen kuin sairastavien määrä kääntyy laskuun?
 b) Kuinka monta prosenttia väestöstä on enimmillään sairaana?
 c) Kuinka monen vuorokauden kuluttua sairastavien määrä lisääntyy nopeimmin?
3. Suorakulmion muotoisen pahvilevyn sivujen pituudet ovat 40 cm ja 50 cm. Levyn jokaisesta nurkasta leikataan kuvion mukaisesti samanlainen suorakulmion muotoinen pala, jonka sivujen suhde on 1 : 2. Jäljelle jäänyt levy taiteetaan katkoviivoja pitkin laatikoksi, jonka toiset päädyt ovat kaksinkertaiset. Kuinka pitkä pois leikattavan palan lyhyemmän sivun tulee olla, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



4. Pisteet $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ ovat kaksi eri pistettä paraabelilla $y = ax^2$ (missä $a \neq 0$). Paraabelille piirretään pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran suuntainen tangentti. Mikä on sivuamispisteen x -koordinaatti?

5. Millä vakion a arvoilla funktio

$$f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4ax + 1$$

on kaikkialla aidosti kasvava tai kaikkialla aidosti vähenevä?

6. Mihin käyrän $y = (x - 1)^2$ pisteisiin piirretty käyrän tangentti rajaa kolmion yhdessä positiivisten koordinaattiakselien kanssa? Mikä näin saatavan kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

SARJA D

1. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3x^2 + 9x}$ raja-arvo kohdissa -3 ja 0 .
2. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 31$ kuvaajan
 - a) x -akselin suuntaisten tangenttien
 - b) y -akselin suuntaisten normaalien yhtälöt.
3. Pahvilevy, jonka mitat ovat $5 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$, taitetaan 5 cm pitkäksi tulitikkurasiaksi, jonka toinen raapaisupinta on kaksinkertainen. Mikä on rasian suurin mahdollinen tilavuus?
4. On päätetty rakentaa joka kohdasta yhtä syvä uima-allas, joka ylhäältä katsottuna on suorakulmio ja jonka pituus on kaksi kertaa niin suuri kuin leveys. Uima-altaan tilavuudeksi on päätetty 120 m^3 . Altaan pohja ja seinät kaakeloidaan. Määritä altaan mitat niin, että kaakelia kuluu mahdollisimman vähän. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.
5. Paraabeli, jonka akseli on y -akselin suuntainen, kulkee pisteen $(0, 5)$ kautta ja sivuaa suoraa $y = x + 1$ pisteessä $(3, 4)$. Mikä paraabelin yhtälö on?
6. Osoita, että olipa a mikä reaalityökalu tahansa, niin yhtälöllä $x^3 + ax^2 + a^2x - \frac{1}{2} = 0$ on tasan yksi juuri välillä $]0, 1[$.

SARJA E

1. Paraabelille $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ pisteeseen $(2, -3)$ piirretyt tangentti ja normaali rajaavat yhdessä y -akselin kanssa kolmion. Laske kolmion pinta-ala.
2. Osoita, että käyrät $y = \frac{1}{x}$ ja $y = \frac{1}{34 - 16x}$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.
3. Jätevedet johdetaan lietealtaasta puhdistamoon pitkin suoraa kourua, jonka poikkileikkaus on suorakulmion muotoinen. Poikkileikkauksen pinta-alan suuruudeksi on määrätty 1 m^2 . Virtausvastuksen minimoimiseksi kourun seinien ja pohjan yhteenlasketun pinta-alan tulee olla mahdollisimman pieni. Mitkä tulee asettaa poikkileikkauksen mitoiksi? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.
4. Muodosta funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ erotusosamäärä kohdassa 1 ja määritä erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 1 . Tarkista tulos muodostamalla derivointikaavojen avulla derivaattafunktio $f'(x)$ ja laskemalla funktion arvo $f'(1)$.
5. Paraabelin $y = x^2 + 1$ pisteeseen, joka ei ole paraabelin huippu, piirretään paraabelin tangentti. Sivuauspiste ja y -akseli erottavat tangentista janan. Osoita, että janan keskipiste on suoralla $y = 1$.
6. Lankun poikkileikkaus on suorakulmio, jonka ympärysmitta on määrätty. Mikä lankun paksuuden suhde leveyteen tulee olla, jotta lankun kantokyky olisi mahdollisimman suuri? Lankun kantokyky on suoraan verrannollinen lankun paksuuden neliöön ja suoraan verrannollinen lankun leveyteen.

Vastaukset

Rationaalifunktio

1. a) $f(t) = (t^3 + 3)^2$, kuudennen asteen polynomifunktio, rationaalifunktio, määrittelyjoukko $\mathbb{R}$
b) $f(x) = \frac{5}{x+2}$, ei ole polynomifunktio, on rationaalifunktio, määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ (Määrittelyehto: $x \neq -3$.)
c) $\mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{4}\}$ (Määrittelyehto: $x \neq -3$ ja $x \neq -\frac{1}{4}$.)
3. a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ (Määrittelyehto: $x \neq -3$ ja $x \neq 3$.)
b) $\mathbb{R} \setminus \{0, 9\}$ (Määrittelyehto: $x \neq 0$ ja $x \neq 9$.)
(Toisen asteen yhtälö $x^2 - 9x = 0$ voidaan ratkaista tulon nollasäännöllä:
 $x^2 - 9x = 0$, kun $x(x - 9) = 0$.)
c) $\mathbb{R}$
4. Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Lausekkeen supistettu muoto on $5x$.
Funktion $g(x) = 5x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
5. a) $\frac{x}{3}$ b) $\frac{1}{4x}$ c) $\frac{1}{9}$
6. a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{x+2}{2x}$ d) Ei supistu.
7. a) $\frac{x+4}{2x}$ b) $\frac{1}{t+1}$ c) $\frac{4-t}{6}$
8. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{7}{x-3}$
9. a) -1 b) 1
c) $-x$ d) Ei supistu.
10. a) $t-2$ b) $\frac{2}{t+2}$ c) $\frac{1}{4t+4}$
11. a) $\frac{1}{1-t}$ ($= -\frac{1}{t-1}$) b) $\frac{t-1}{t+1}$
c) Ei supistu. d) $\frac{t}{t+1}$
12. a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$,
supistettu lauseke $x-1$.
b) $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$ ja
 $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$,
supistettu lauseke $\frac{x+2}{x+5}$.
(Jos polynomifunktiolla $ax^2 + bx + c$ on nollakohdat x_1 ja x_2 , niin
 $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.)
13. a) $f(-4) \approx 1,5$ ja $f(0) = 3$
b) 1 ja 2
c) -3 , -1 ja 4
d) $] -3, -1[$ ja $]4, 5]$
14. a) $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ b) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{0, -25\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{0, -5, 5\}$
15. a) Ei supistu. b) Supistuu muotoon x .
16. a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{3}{x+1}$
17. a) $\frac{t-5}{10}$ b) $\frac{t^2-2}{t}$ c) $\frac{1}{x+10}$
18. a) $\frac{5}{4}$ b) Ei supistu. c) $\frac{5}{3x}$

19. a) $\frac{x}{x+1}$ b) $-\frac{x+1}{x-1}$ c) $\frac{4x-4}{3x}$

20. a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{x-1}{x^2}$ c) $\frac{x+3}{3x}$

21. a) $\frac{2t+4}{t^2+4}$ b) $\frac{2}{t+2}$
c) $\frac{1}{2t}$ d) $-\frac{2}{t(t+2)}$

22. $\frac{x-1}{2x+1}$

23. $c = -70$. Supistettu muoto $3x - 14$.

Rationaalilausekkeen sieventäminen

24. a) $\frac{5}{4}$ b) $-\frac{11}{24}$ c) $\frac{2}{7}$

25. a) $\frac{19}{6x}$ b) $\frac{4-5x}{10x}$
c) $\frac{-2+15x}{5x}$

26. a) $\frac{5-4x}{x^2}$ b) $\frac{x^2-3}{x}$ c) $-\frac{5}{x}$

27. a) $\frac{2x-1}{x^2}$ b) $\frac{5x+12}{2x^2}$ c) $-\frac{x}{x-1}$

28. a) $\frac{t^2+6}{(t+3)(t-2)}$ b) $\frac{1}{2}$

29. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{9}$
c) $\frac{9}{25}$ d) $\frac{1}{8}$

30. a) tulo $\frac{x^2+x}{3}$, osamäärä $\frac{3x^3}{x+1}$
b) tulo $\frac{x+1}{3x-3}$, osamäärä $\frac{3x^2}{x^2-1}$
c) tulo $\frac{1}{x^2}$, osamäärä $\frac{1}{(x-1)^2}$

31. a) $-\frac{1}{x}$ b) $\frac{x}{2}$ c) $\frac{x-1}{x}$

32. a) $\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{s}{s+1}$ c) $-\frac{2x}{x^2-1}$

33. a) $-\frac{1}{x-3}$ b) $\frac{-6-2x}{x^2}$

34. a) $\frac{5x-2}{x^2}$ b) $\frac{10x+24}{(x+3)^2}$

35. a) $\frac{3x-1}{x-2}$ b) $\frac{x^2+2}{x+1}$
c) $\frac{x^2-5x+7}{x-3}$

36. a) $\frac{3}{2x(2x^2-3)}$ b) $\frac{x^2}{(x+2)(x+1)}$

37. $\frac{9}{13}$

38. tulo $\frac{x^2}{(x-1)^2}$, osamäärä $(x+1)^2$

39. a) $\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{x^2+1}{x^2+x}$
c) $-\frac{1}{x}$ d) $x+1$

40. a) $\frac{1}{t}$ b) $\frac{s+4}{s^2-4}$ c) $-\frac{1}{x^2+x}$

41. a) $\frac{-2x+4}{x^2-3}$ b) $-\frac{x-2}{x-1}$

42. a) $x-1$ b) $\frac{-2x^2}{x-1}$

43. a) $\frac{1}{ab}$ b) $-a-b$

44. a) -3 b) $\frac{28}{3}$

Funktion raja-arvo

45. a) 10
b) 11 (Funktio on määritelty kohdassa 5, joten raja-arvon saa sijoittamalla.)
c) $\frac{3}{2}$ ($\frac{3x-15}{2x-10} = \frac{3(x-5)}{2(x-5)}$)
46. a) 3 b) -3
47. a) $-\frac{1}{12}$ b) $\frac{3}{8}$
48. a) 2 b) -1
49. a) Ei raja-arvoa. (Lauseke ei ole kohdassa 4 ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”.)
b) Ei raja-arvoa. (Lauseke supistuu muotoon $\frac{x+3}{x-3}$, joka ei ole kohdassa 3 ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”.)
c) 0
50. a) 4 b) -4
51. a) $-\frac{2}{27}$ b) -54
52. a) 1 b) $\frac{4}{3}$
(Jos toisen asteen polynomifunktiolla $ax^2 + bx + c$ on nollakohdat x_1 ja x_2 , niin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.)
53. a) 2 b) 8
54. a) 2 b) -3 c) 15
55. a) $\frac{1}{2}$ b) -2 c) -2
56. a) 2 b) -1
57. a) Ei raja-arvoa.
b) $\frac{3}{4}$
c) Ei raja-arvoa.

58. a) 8 b) 16

59. $a = -75$, jolloin raja-arvo on 30.

60. 0

61. a) -8 b) $\frac{5}{3}$

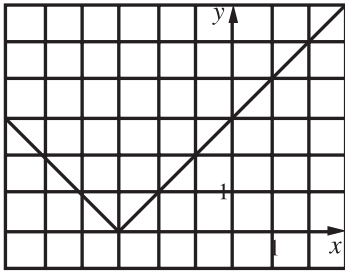
62. $a = 6$, jolloin raja-arvo on 4.

63. a) 2 b) 20 c) 1 000

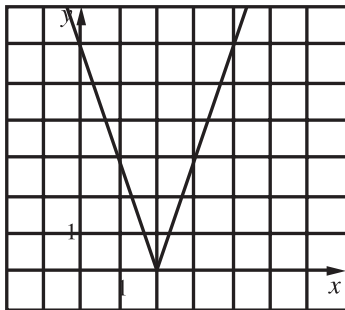
Funktion jatkuvuus

64. a) Funktio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 11$ on jatkuva välillä $[4, 5]$, ja arvot $f(4)$ ja $f(5)$ ovat erimerkkiset, joten funktiolla f on nollakohta välillä $]4, 5[$.
b) 4,4 (Koska joudutaan laskemaan saman funktion useita arvoja, funktio kannattaa näppäillä graafisen laskimen grafiikkafunktioksi (piirrettäväksi funktioksi), jolloin voidaan käyttää laskimen arvojenlaskemistoimintoa.)
65. Funktio f on jatkuva välillä $[1, 2]$, ja luku π on päätepistearvojen $f(1)$ ja $f(2)$ välissä, joten funktio f saa jossain kohdassa välillä $]1, 2[$ arvon π .
(Toinen tapa on osoittaa, että funktiolla $g(x) = x^3 - x + 1 - \pi$ on nollakohta välillä $]1, 2[$.)
66. a) Ei voida, sillä funktio f ei ole määritelty koko välillä $[3, 6]$.
b) Ei ole. (Koska osamäärä on nolla vain silloin, kun jaettava on nolla, funktion f ainoa nollakohta on osoittajan nollakohta -7.)
67. Funktio $f(x) = \frac{10}{x^4} + x - 5$ on jatkuva välillä $[4,9835; 4,9845]$, ja funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten funktiolla f on nollakohta välillä $]4,9835; 4,9845[$.
68. Funktion $f(x) = x^3 + ax - 1$ arvot $f(0)$ ja $f(1)$ ovat erimerkkiset.

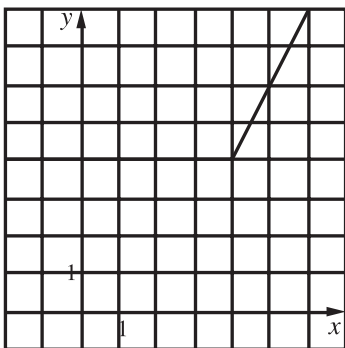
69. a) $|x + 3| = \begin{cases} -x - 3, & \text{kun } x < -3 \\ x + 3, & \text{kun } x \geq -3 \end{cases}$



b) $|3x - 6| = \begin{cases} -3x + 6, & \text{kun } x < 2 \\ 3x - 6, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$

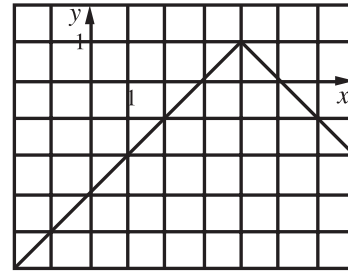


70. a) $x + |4 - x| = \begin{cases} 4, & \text{kun } x \leq 4 \\ 2x - 4, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$



(Kuvajaan kuuluu suoran $y = 4$ se osa, missä $x \leq 4$, ja suoran $y = 2x - 4$ se osa, missä $x > 4$. Kuvaajan voi tarkistukseksi piirtää myös graafisella laskimella.)

b) $1 - |4 - x| = \begin{cases} x - 3, & \text{kun } x \leq 4 \\ -x + 5, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$



71. $f(-5) = -\frac{10}{3}$ (Tulee olla $f(-5) = \lim_{x \rightarrow -5} f(x)$.)

72. Ei voida, sillä funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 4.

73. a)

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

b) Ei voida.

74. a) Funktio $f(x) = x^3 + x + 100$ on jatkuva välillä $[-5, -4]$, ja funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset.

b) $-4,57$

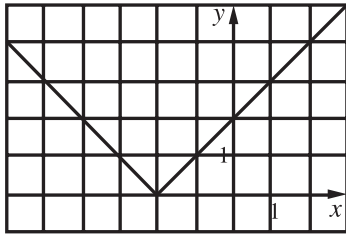
75. Funktio f on jatkuva välillä $[40, 41]$, ja luku 2007 on päätepistearvojen $f(40)$ ja $f(41)$ välissä.

76. a) Funktio $f(x) = 0,3x^4 - 50x^3 - 10\,000$ on jatkuva välillä $[166,5; 167,5]$, ja funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset.

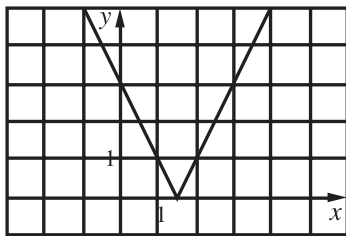
b) $166,7$

77. Funktio $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$ on jatkuva välillä $[0, 1]$, ja arvot $f(0)$ ja $f(1)$ ovat erimerkkiset.

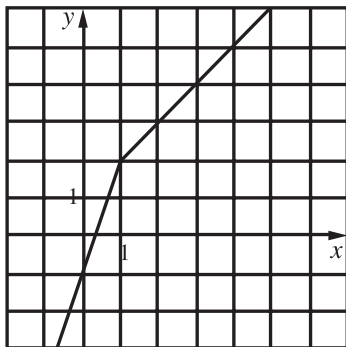
78. a) $|x+2| = \begin{cases} -x-2, & \text{kun } x < -2 \\ x+2, & \text{kun } x \geq -2 \end{cases}$



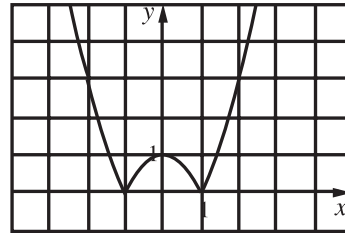
b) $|2x-3| = \begin{cases} -2x+3, & \text{kun } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x-3, & \text{kun } x > \frac{3}{2} \end{cases}$



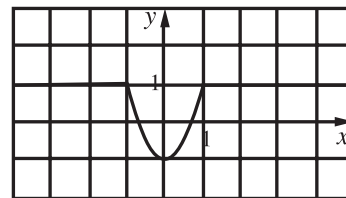
79. $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{kun } x < 1 \\ x+1, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$



80. a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{kun } x \leq -1 \\ -x^2+1, & \text{kun } -1 < x < 1 \\ x^2-1, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$



b) $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \leq -1 \\ 2x^2-1, & \text{kun } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$



81. $f(-3) = -5$ (Arvon $f(-3)$ tulee olla yhtä suuri kuin funktion f raja-arvo kohdassa -3 .)

82. Arvolla $a = -12$, jolloin tulee määritellä

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -3.$$

83. Suurin arvo on 7 ja pienin arvo on 0. Jatkuvuus takaa, että funktio f saa jossain välin $]a, b[$ pisteessä arvon 0.

84. a) Ei missään kohdassa.
b) Kohdassa 0.

85. a) Jos $f(x) \geq 0$, niin $|f(x)| = f(x)$, ja jos $f(x) < 0$, niin $|f(x)| = -f(x)$.

Kummassakin tapauksessa lauseke

$$\frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) + \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|)$$

sievenee muotoon $f(x)$.

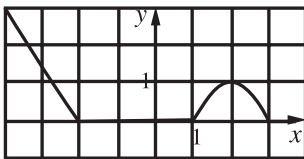
Lausekkeen voi sieventää myös suorittamalla kertolaskut.

b)

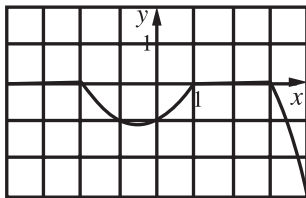
$$u(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{kun } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{kun } f(x) > 0 \end{cases}$$

c)



funktion $u(x)$ kuvaaja

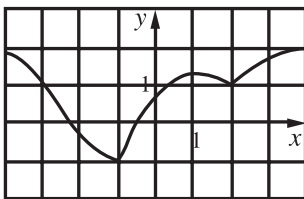


funktion $v(x)$ kuvaaja

86. a) $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{kun } f(x) < g(x) \end{cases}$

Siis $h(x)$ on suurempi luvuista $f(x)$ ja $g(x)$.

b)



Funktion kasvunopeus

87. a) 1 cm/vrk ja 0,7 cm/vrk
b) 4 cm/vrk

88. a) 63 % b) noin 75 %

89. $f'(-2) = 1$, $f'(-1) = 0$, $f'(2) = -5$

90. a) $f'(-3) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(2) = 1$
b) $f(-3) \approx 3,6$, $f(0) = 1$, $f(2) = 1$

91. a) 5 b) -4

92. a) 0 b) 0

93. a) $x = 2$ b) $x > 2$ c) $x < 2$

94. Funktio h ei ole derivoituva kohdissa 2 ja 5.
Kun $x < 2$, niin $h'(x) = 1$.

Kun $2 < x < 5$, niin $h'(x) = \frac{1}{3}$.

Kun $x > 5$, niin $h'(x) = -3$.

95. $f(9) = 3$

96. a) 67 % b) 33 % c) 200 %

97. a) 15 km/h
b) Kahden tunnin kuluttua noin 15 km/h ja kolmen tunnin kuluttua noin 7 km/h.

98. a) $f(3) = 1$, $f'(3) = -2$

- b) $f(0) = 2$, $f'(0) = \frac{1}{2}$

- c) $f(-2) = -1$, $f'(-2) = 3$

99. $f'(0) = -3$, $f'(2) = -1$, $f'(3) = 0$, $f'(4) = 1$

100. a) $f(4) = -6$, $f'(4) = -3$

- b) $f(4) = -17$, $f'(4) = 0$

101. a) -3 ja 1 b) $x < -3$ tai $x > 1$
c) $-3 < x < 1$

102. Funktio g ei ole derivoituva kohdissa -1 ja 3.

Kun $x < -1$, niin $g'(x) = 2$.

Kun $-1 < x < 3$, niin $g'(x) = 0$.

Kun $x > 3$, niin $g'(x) = -\frac{1}{2}$.

103. $f(-1) = 1$ ja $f(4) = 2$

104. Esimerkiksi funktio $f(x) = |x - 3|$

105. a) Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa.
b) Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on muuttujan arvon 2 kohdalla.

Derivaatta raja-arvona

106. a) Erotusosamäärä kohdassa 4 on $\frac{x^2 - 16}{x - 4}$

ja $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$ kohdassa -3 .

b) $f'(4) = 8$, $f'(-3) = -6$

107. a) $\frac{7x - 35}{x - 5}$

b) $7 \quad (f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x - 35}{x - 5})$
 $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{7(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} 7 = 7.)$

108. 5 (Erotusosamäärä on $\frac{x^3 + 5x}{x}$.)

109. $-\frac{3}{2}$ (Erotusosamäärä kohdassa 2 on

$\frac{\frac{6}{x} - 3}{\frac{x}{x - 2}} = (\frac{6}{x} - 3) : (x - 2).)$

110. 6

111. a) $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0$, $x \neq a$

b) 0

112. a) $f'(-3) = -6$ ja $g'(-3) = -\frac{1}{9}$

(Funktio f erotusosamäärä kohdassa -3 on $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$, ja funktion g erotusosamäärä kohdas-

sa -3 on $(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}) : (x + 3).)$

b) $h'(-3) = -\frac{3}{2}$, $u'(-3) = -\frac{2}{3}$ ja $v'(-3) = -\frac{5}{6}$

113. -2

114. a) $\frac{x^2 - 3x}{x}$

b) -3

115. a) $(\frac{1}{x - 2} - 1) : (x - 3)$

b) -1

116. 2

117. $\frac{1}{16}$

118. a) $\frac{kx - ka}{x - a}$ b) k

$(\lim_{x \rightarrow a} \frac{kx - ka}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} k = k)$

119. a) Lausekkeiden yhtäsuuruus perustellaan suorittamalla kertolasku. Funktio x^3 derivaatta kohdassa 1 on 3.

b) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$,
Funktio x^5 derivaatta kohdassa 1 on 5.

120. a) $f'(1) = 4$ ja $g'(1) = 8$

(Funktio f erotusosamäärä kohdassa 1 on

$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x - 1}$
 $= \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x - 1}.$

Funktio g erotusosamäärä kohdassa 1 on

$\frac{x^8 - 1}{x - 1} = \frac{(x^4 + 1)(x^4 - 1)}{x - 1}.)$

b) -1

121. a) $\frac{f(x)^2 - f(a)^2}{x - a}$

b) $g'(a) = 2f(a)f'(a)$

(Erotusosamäärän raja-arvon määrittämisessä tarvitaan tietoa, että funktio on jatkuva jokaisessa kohdassa, jossa se on derivoituva. Siis

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).)$

c) $f'(5) = 10$, $g'(5) = 580$

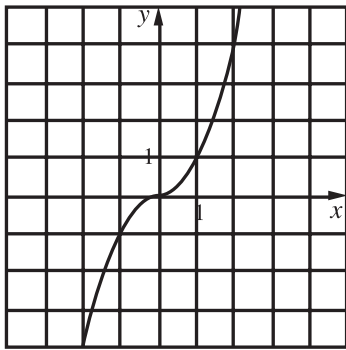
122. Erotusosamäärä kohdassa 0 on

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

123. On derivoituva ja $f'(0) = 0$.
(Erotusosamäärä kohdassa 0 on

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x|x|}{x} = |x|.)$$



124. a) Ei ole.
b) On. $h'(0) = 0$.

Derivaattafunktio

125. a) $3x^2$ b) $2x^5$ ($\frac{x^6}{3} = \frac{1}{3}x^6$)
c) $-20x^3$ d) $-\frac{5}{4}$ e) 0

126. $f'(x) = 20x^3 - \frac{1}{2}x + 7$

127. 5 (Derivaattafunktioon $f'(x) = 9x^2 - 4$ sijoitetaan $x = -1$.)

128. a) 3 (Derivaattafunktioon $g'(t) = 3 - 2t$ sijoitetaan $t = 0$.)
b) $\frac{3}{2}$ (Ratkaistaan yhtälö $3 - 2t = 0$.)

129. $f(-1) = -4$, $f'(-1) = 16$ ($f(x) = 9x^3 + 6x^2 + x$)

130. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$

131. a) $x > 4$ b) $x < 0$ tai $x > 8$

132. 0,23 g/vko ja 0,50 g/vko
(Derivaattafunktioon $m'(t)$ sijoitetaan t :n arvot 2 ja 8.)

133. $b = 4$ ($f'(x) = 5x^4 - 2bx$)

134. a) $17x^{16}$ b) $-\frac{5}{4}x^4$
c) 0 d) 0

135. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$
b) $h'(x) = -12x^2 + 11$

136. a) 29 m/s b) 49 m/s

137. $h(-1) = -2$, $h'(-1) = 15$

138. a) $h'(x) = 16x^5 - 4$
b) $f'(t) = \frac{1}{6} - t^2$ ($f(t) = \frac{1}{6}t - \frac{1}{3}t^3$)

139. $t = 6$

140. a) 0 b) -75 c) -5 ja 5

141. $-2 < x < 3$

142. a) 4,0 s b) 10 m/s, 0 m/s ja -10 m/s
c) 20 m/s

143. a) $g'(t) = s^2$ b) $h'(s) = 2st + 1$

144. $a = 0$ tai $a = -14$ ($f'(s) = 2as + a^2$.
Ehdosta $f'(7) = 0$ saadaan yhtälö.)

Käyrän tangentti

145. a) $y = -x - 1$ b) $y = x - 3$

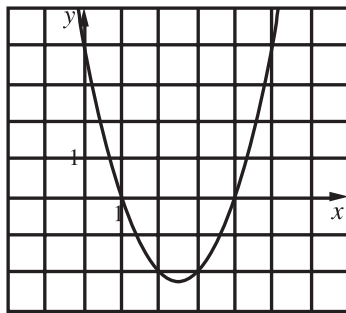
(Pisteen y -koordinaatti on $1^2 - 3 \cdot 1 = -2$.
Tehtävän tuloksen, samoin kuin useimpien tämän luvun tehtävien tulokset, voi tarkista graafisella laskimella.)

146. a) $y = 2$ b) $x = 0$

(Pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan x -akselin suuntaisen suoran yhtälö on $y = y_0$ ja y -akselin suuntaisen suoran yhtälö $x = x_0$.)

147. a) 3 b) -2

148. huippu $(2,5; -2,25)$



149. pisteeseen $(1, -4)$, $y = -3x - 1$
(Ratkaistaan ensin, millä muuttujan arvolla funktion $f(x) = x^2 - 5x$ derivaatta (tangentin kulmakerroin) on yhtä suuri kuin suoran $y = -3x + 5$ kulmakerroin -3 .)

150. a) 10 metrin korkeudella (Määritetään paraabelin $y = x - 0,025x^2$ huipun y -koordinaatti.)
b) 27° :n kulmassa (Arvon $x = 10$ kohdalla paraabelin tangentin kulmakerroin on $0,5 = \frac{1}{2}$.)

151. $18,4^\circ$ (Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 2$ derivaatta kohdassa 0 on -3 . Kulmakertoimen apukolmiosta nähdään, että kysytyn kulman tangentti on $\frac{1}{3}$. Kulma voidaan laskea myös tangentin suuntavektorin $\vec{i} - 3\vec{j}$ ja y -akselin suuntavektorin $\vec{j}$ pistetulon avulla.)

152. $y = 0$ ja $y = 12x - 36$ (Paraabelille pisteeseen (a, a^2) piirretyn tangentin yhtälö on $y - a^2 = 2a(x - a)$. Ratkaistaan, millä a :n arvoilla tangentti kulkee pisteen $(3, 0)$ kautta. Saadaan $a = 0$ tai $a = 6$.)

153. Leikkauspisteeseen $(2, 4)$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat -1 ja 1 , joten tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

154. Molemmat käyrät kulkevat pisteen $(1, 2)$ kautta, ja molempien käyrien tähän pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on 3.

155. Janan pituus on aina 1.

(Kuvaajan pisteeseen $(a, \frac{1}{2}a^2)$ piirretyn normaalin yhtälö on

$$y - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{a}(x - a).$$

Normaali leikkaa y -akselin pisteessä

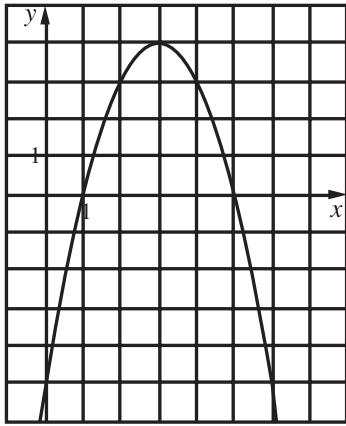
$$(0, \frac{1}{2}a^2 + 1).$$

156. a) $y = 4x - 9$ b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

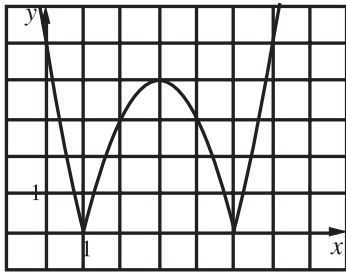
157. $(3\frac{1}{2}, 0)$

158. pisteisiin $(2, 1)$ ja $(-2, -3)$

159. a) pisteessä (3, 4)



b)



(Kuvaaja saadaan, kun a-kohdan paraabelin x -akselin alapuoliset osat peilataan x -akselin suhteen.)

160. 35 m

- 161.
- $a = -6$
- ,
- $b = 16$

(Funktioille $f(x) = x^2 + ax + b$ tulee olla $f'(3) = 0$ ja $f(3) = 7$.)

162. a) 128 % b) 32 %

- 163.
- 63°

164. origoon ja pisteeseen (6, 216)

(Pisteeseen (a, a^3) piirretyn tangentin yhtälö on $y - a^3 = 3a^2(x - a)$.)

165. $18,4^\circ$ (Leikkauspisteen x -koordinaatti on 1. Leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat 2 ja 1. Kahden suoran välinen kulma voidaan laskea trigonometrisesti apukolmioiden avulla tai suuntavektorien pistetulon avulla.)

166. Leikkauspisteiden x -koordinaatit ovat 0 ja 1. Jälkimmäiseen leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

167. pistettä $(0, \frac{1}{2})$ (Paraabelille $y = x^2$ pisteeseen (a, a^2) piirretyn normaalin yhtälö on $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$.)

168. paraabelilla $y = x^2$ (Paraabelin $y = ax - x^2$ huippu on pisteessä $(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4})$.)

169. Osoitetaan, että pisteen $(c, -\frac{1}{4})$ kautta kulkevat paraabelin tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Pisteeseen (a, a^2) kautta kulkevan tangentin kulmakerroin on $2a$ ja yhtälö $y - a^2 = 2a(x - a)$. Sijoitetaan pisteen $(c, -\frac{1}{4})$ koordinaatit ja ratkaistaan a :n arvot. Osoittautuu, että kulmakertoimien $2a$ tulo on -1 .

170. Osoitetaan vektoreiden pistetulon avulla, että heijastumispisteeseen piirretyn normaalin ja tulevan säteen välinen kulma on yhtä suuri kuin normaalin ja heijastumispisteestä polttopisteeseen kulkevan suoran välinen kulma. Pisteeseen (a, a^2) , missä $a \neq 0$, piirretyn normaalin kulmakerroin on $-\frac{1}{2a}$ ja eräs suuntavektori $\vec{u} = -2a\vec{i} + \vec{j}$. Vektori pisteestä (a, a^2) polttopisteeseen on $\vec{v} = -a\vec{i} + (\frac{1}{4} - a^2)\vec{j}$.

Pistetulon avulla nähdään, että

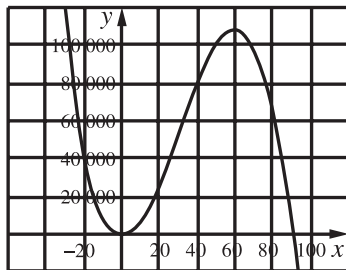
$$\cos(\vec{u}, \vec{j}) = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Tapaus $a = 0$ on käsiteltävä erikseen.

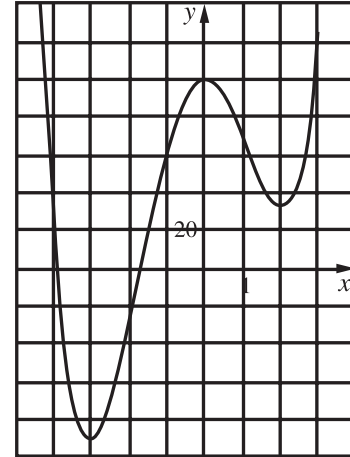
Polynomifunktion kulku

- 171.** a) aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[\frac{1}{3}, \infty[$, aidosti vähenevä välillä $[-1, \frac{1}{3}]$
(Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä funktion f kuvaajan graafisella laskimella.)
- b) Arvo $f(0,00001)$ on suurempi.
(Muuttujan arvot $0,00001$ ja $0,00002$ ovat välillä $[-1, \frac{1}{3}]$, jolla funktio f on aidosti vähenevä. Siis funktion f arvo vasemmanpuoliossa kohdassa $0,00001$ on suurempi.)
- 172.** aidosti kasvava välillä $[80, \infty[$, aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 80]$, minimikohta 80 ja minimiarvo $f(80) = -6300$

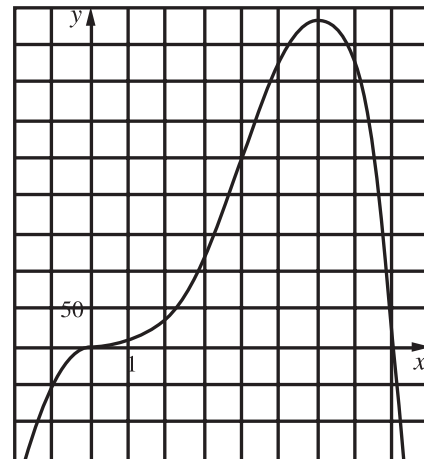
- 173.** a) aidosti kasvava välillä $[0, 60]$, aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[60, \infty[$
b) minimikohta 0 ja minimiarvo $f(0) = 0$, maksimikohta 60 ja maksimiarvo $f(60) = 108\,000$



- c) Arvo $f(41 + 1,2 \cdot 10^{-12})$ on suurempi.
(Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä kuvaajan graafisella laskimella. Huomaa, että sopivan laskimen ikkunan valitsemiseksi tarvitaan tietoa funktion ääriarvokohdista ja ääriarvoista.)
- 174.** Funktion derivaatta on kaikkialla positiivinen. Terassikohtia ei ole.
- 175.** aidosti kasvava väleillä $[-3, 0]$ ja $[2, \infty[$, aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, -3]$ ja $[0, 2]$, minimikohdat -3 ja 2 ja minimiarvot $f(-3) = -89$ ja $f(2) = 36$, maksimiarvo $f(0) = 100$



- 176.** aidosti kasvava välillä $]-\infty, 6]$ ja aidosti vähenevä välillä $[6, \infty[$, maksimikohta 6 ja maksimiarvo 432



- 177.** Yksi juuri, jonka likiarvo on $0,3$.
(Funktion $f(x) = x^3 + 300x - 100$ derivaatta-funktio $f'(x) = 3x^2 + 300$ on kaikkialla positiivinen, joten funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Funktiolla f on siis enintään yksi nollakohta. Koska arvot $f(0) = -100$ ja $f(1) = 201$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on nollakohta välillä $]0, 1[$.)

178. yksi

(Funktion $f(x) = x^5 + x^3 + x - 5$ derivaattafunktion $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ lauseke on positiivisilla luvuilla kerrottujen parillisten potenssien summa lisätynä luvulla 1, joten derivaattafunktion kaikki arvot ovat positiivisia.

Funktio f on siis kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta.

Koska funktion $f(x) = x^5 + x^3 + x - 5$ arvot $f(0) = -5$ ja $f(2) = 37$ ovat erimerkkiset, funktiolla on nollakohta välillä $]0, 2[.$)

179. Kolme juurta, jotka sijaitsevat väleillä $] -3, -2[$, $]2, 3[$ ja $]24, 25[$.

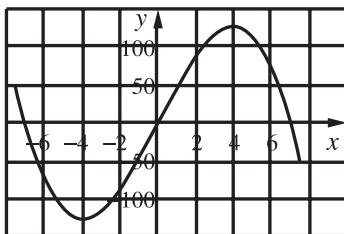
(Funktion $f(x) = x^5 - 25x^4 + 1000$ kulkukaaviosta nähdään, että funktio f on aidosti kasvava välillä $] -\infty, 0[$, aidosti vähenevä välillä $[0, 20]$ ja aidosti kasvava välillä $[20, \infty[$.

Näillä jokaisella välillä funktiolla f on enintään yksi nollakohta, joten yhtälöllä on enintään kolme juurta. Jokaiselta väliltä löytyy osaväli, jolla funktio vaihtaa merkkiään.)

180. $a \geq 1$

(Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3a$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Derivaattafunktion arvot ovat mahdollisesti yhtä kohtaa lukuunottamatta positiivisia, kun yhtälön

$3x^2 + 6x + 3a = 0$ diskriminantti on negatiivinen tai nolla.)

181. $b = 6$, maksimiarvo -1 182. maksimikohta 4 ja maksimiarvo $f(4) = 128$, minimikohta -4 ja minimiarvo $f(-4) = -128$ 183. a) $f(9,49999)$ b) $f(10,50001)$

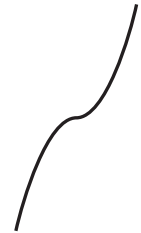
(Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f on aidosti vähenevä välillä $[0; 10,5]$ ja aidosti kasvava välillä $[10,5; \infty[.$)

184. välillä $[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}]$

185. a) Funktiolla on maksimikohta ja minimikohta.



b) Funktio on kaikkialla aidosti kasvava (yksi terassikohta).



c) Funktio on kaikkialla aidosti kasvava.

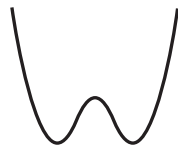
186. aidosti kasvava väleillä $] -\infty, -1]$ ja $[0, 7]$, aidosti vähenevä väleillä $[-1, 0]$ ja $[7, \infty[$, maksimikohdat -1 ja 7 , maksimiarvot $f(-1) = 5$ ja $f(7) = 1029$, minimikohta 0 ja minimiarvo 0 187. aidosti kasvava väleillä $] -\infty, -\frac{3}{5}]$ ja $[\frac{3}{5}, \infty[$,aidosti vähenevä välillä $[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}]$,maksimikohta $-\frac{3}{5}$ ja minimikohta $\frac{3}{5}$,terassikohta 0 188. Derivaattafunktion $f'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 7$ lausekkeessa kaikki potenssit ovat parillisia ja kertoimet negatiivisia, joten derivaatta on kaikkialla negatiivinen. Funktiolla on yksi nollakohta.

- 189.** Yksi juuri, jonka likiarvo on $-2,3$.
(Funktio f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, -1]$, joten tällä välillä funktiolla on korkeintaan yksi juuri. Koska $f(-3) = -13 < 0$ ja $f(-1) = 7 > 0$, yhtälöllä on yksi juuri välillä $]-\infty, -1]$. Funktio f on aidosti vähenevä välillä $[-1, 1]$. Koska $f(1) = 3 > 0$, yhtälöllä ei ole juurta välillä $[-1, 1]$. Funktio f on aidosti kasvava välillä $[1, \infty[$. Koska $f(1) > 0$, yhtälöllä ei ole juurta välillä $[1, \infty[$.)

190. kolme

- 191.** Sijoittamalla yhtälöön $x = 1$ todetaan, että luku 1 on juuri. Funktion $f(x) = 5x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 2$ derivaattafunktiolla on nollakohdat 0 ja $\frac{6}{5}$, ja kaikkialla muualla derivaatta on positiivinen. Funktio f on siis kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä ei ole muita nollakohtia kuin $x = 1$.

- 192.** a) Kaksi minimikohtaa ja yksi maksimikohta.



- b) Yksi minimikohta ja yksi terassikohta.



- c) Yksi minimikohta.



- 193.** Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Tutkimalla yhtälön $3x^2 - 2ax + a^2 = 0$ diskriminanttia nähdään, että funktion $f'(x)$ kuvaaja joko sivuaa x -akselia ($a = 0$) tai on kokonaan sen yläpuolella.

194. $\frac{5}{2}$

- 195.** Tutkimalla derivaattafunktion $f'(x)$ derivaattafunktiota, jota on tapana merkitä $f''(x)$, nähdään, että derivaattafunktio $f'(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava. Tästä voidaan päätellä funktion f kulku.

Polynomifunktion suurin ja pienin arvo

- 196.** a) Ei suurinta eikä pienintä arvoa.
b) Suurin arvo on, pienintä arvoa ei ole.
c) Ei suurinta eikä pienintä arvoa.
d) Pienin arvo on, suurinta arvoa ei ole.
- 197.** a) Suurin arvoa ei ole.
b) -10 (arvo kohdassa 4)
c) $[-10, \infty[$
- 198.** a) 8 (arvo $f(2)$)
b) 9 (arvo $f(3)$)
- 199.** a) Ei suurinta arvoa, pienin arvo kohdassa 0 tai 5.
b) Ei suurinta arvoa, pienin arvo kohdassa 5.
c) Suurin arvo kohdassa 2 tai 7, pienin arvo kohdassa 5.
d) Suurin arvo kohdassa 1 tai 7, pienin arvo kohdassa 0 tai 5.
- 200.** a) $-425\,000$ (arvo $f(-50)$)
b) $-256\,000$ (arvo $f(80)$)
- 201.** 5 (Funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä.)
- 202.** a) pienin arvo $-3\,072$, arvojoukko $[-3\,072, \infty[$
b) Koska funktion $f(x)$ pienin arvo on $-3\,702$, niin kaikki funktion arvot ovat suurempia kuin $-3\,705$.
- 203.** kohdassa 3
- 204.** a) suurin arvo $f(9) = 2\,187$, pienin arvo $f(13) = -2\,197$
b) suurin arvo $f(8) = 2\,048$, pienin arvo $f(-5) = -2\,125$
- 205.** $c = 5$ (Funktion f suurin arvo välillä $[0, 2]$ on $f(2) = 2 + c$.)

- 206.** Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - x + \frac{5}{27}$ pienin arvo välillä $]0, \infty[$ on $f(\frac{1}{3}) = 0$. Koska pienin arvo on nolla, kaikki arvot ovat epänegatiivisia.
- 207.** Derivaattafunktiolla $f'(x)$ ei ole nollakohtia, ja sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $f'(x) > 0$ kaikilla x . Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Funktion f arvot kasvavat hitaimmin muuttujan arvon $-\frac{1}{3}$ kohdalla. (Funktion $f'(x)$ arvo on pienin kohdassa $-\frac{1}{3}$.)
- 208.** $\frac{1}{2}$ (Kohta, jossa funktion $f(x) = x - x^2$ arvo on suurin.)
- 209.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Määritetään välin $]0, \infty[$ kohta, jossa funktion $f(x) = x - x^3$ arvo on suurin.)
- 210.** a) 6,25 b) 6
- 211.** -0,25 (Funktion $f(x) = x + x^2$ pienin arvo.)
- 212.** a) -150 b) -406
- 213.** a) ei suurinta arvoa
b) ei suurinta arvoa
c) 9
- 214.** a) suurin arvo $f(0) = 3$, pienin arvo $f(-2) = -1$
b) suurin arvo $f(2) = 15$, pienin arvo $f(-1) = 0$
- 215.** kohdassa $66\frac{2}{3}$
- 216.** suurin arvo $f(1) = 1$, pienin arvo $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$
- 217.** a) $\frac{1}{4}$ b) $]-\infty, \frac{1}{4}]$
- 218.** Funktion $f(x) = 15x^5 - x^3$ suurin arvo välillä $[-0,25; 0,25]$ on 0,0032 ja pienin arvo -0,0032. Siis kaikilla välillä $[-0,25; 0,25]$ olevilla muuttujan arvoilla on $-0,0032 \leq f(x) \leq 0,0032$.
- 219.** On osoitettava, että kaikilla muuttujan arvoilla on $\frac{x^2 + x^4}{2} \geq x^3$ eli $x^2 + x^4 \geq 2x^3$.
Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $x^2 + x^4 - 2x^3 \geq 0$ kanssa.
Osoitetaan, että funktion $f(x) = x^2 + x^4 - 2x^3$ pienin arvo on nolla.
- 220.** Funktio f on vähenevä välillä $[1, 3]$.
Funktion f arvot pienenevät nopeimmin arvon $x = 2$ kohdalla. (Määritetään välin $[1, 3]$ kohta, jossa derivaattafunktion $f'(x)$ arvo on pienin.)
- 221.** a) 8 viikon kuluttua, 3 560 yksilöä
b) 4 viikon kuluttua, 480 yksilöä/viikko
- 222.** suurin arvo 9, pienin arvo 0
(Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x - 6$. Funktion f pienin arvo välillä $[-2, 1]$ on -9 ja suurin 7. Siis funktion $|f(x)|$ suurin arvo on 9. Koska funktio f saa välillä $[-2, 1]$ sekä negatiivisia että positiivisia arvoja ja koska funktio f on jatkuva, funktio f saa jossain välin $[-2, 1]$ kohdassa arvon 0. Siis funktion $|f(x)|$ pienin arvo välillä $[-2, 1]$ on 0.)
- 223.** suurin arvo 12, pienin arvo -8
(Suoralla $y = x$ olevalla kolmion sivulla lauseke sievenee muotoon $4x$, missä $0 \leq x \leq 3$. Suoralla $y = -x$ olevalla sivulla lauseke on $2x^2 - 8x$, missä $0 \leq x \leq 3$. Suoralla $x = 3$ olevalla sivulla lauseke on $3y + 3$, missä $-3 \leq y \leq 3$.)
- 224.** a) pisteessä $(-1, 0)$
b) pisteissä $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$ ja $(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4})$
(Ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ on $y^2 = 1 - x^2$. Sijoittamalla lausekkeeseen $x^2(1 - x - y^2)$ saadaan muuttujan x funktio $f(x) = x^2(x^2 - x)$, missä x on välillä $[-1, 1]$.)

- 225.** arvo $f(1) = -1$
(Osoitetaan ensin derivaattafunktion $f'(x)$ derivaattafunktion $f''(x)$ avulla, että derivaattafunktio $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 4$ on kaikkialla aidosti kasvava. Sen jälkeen huomataan, että $f'(1) = 0$. Derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaaviosta voidaan päätellä, että funktio f saa pienimmän arvon kohdassa $x = 1$.)
- 226.** Muodostetaan funktio g , jonka kuvaaja on funktion f kuvaajalle pisteeseen $(a, f(a))$ piirretty tangentti, ja osoitetaan, että funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ pienin arvo on nolla. Funktio g on $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ ja $h(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Derivaattafunktiolla $h'(x)$ on nollakohta $x = a$. Koska $h''(x) = f''(x)$ ja $f''(x) > 0$ kaikilla x , niin voidaan päätellä, että funktio h saa pienimmän arvon kohdassa $x = a$.
- Sovelluksia**
- 227.** jokea vastaan kohtisuorien sivujen pituus 9 m, joen suuntainen sivu 18 m
(Jos jokea vastaan kohtisuora sivu on s ja joen suuntainen sivu t , niin $2s + t = 36$.
Jos muuttujaksi valitaan s , niin pinta-ala on $A(s) = s(36 - 2s)$, missä $0 \leq s \leq 18$.
Jos muuttujaksi valitaan t , niin $A(t) = (18 - \frac{t}{2})t$, missä $0 \leq t \leq 36$.)
- 228.** Aitauksen tulee olla neliö, jonka sivun pituus on 15 m. Pinta-ala on 225 m^2 .
(Jos suorakulmion sivut ovat s ja t , niin $2s + 2t = 60$. Ala muuttujan s funktiona on $A(s) = s(30 - s)$, missä $0 \leq s \leq 30$.)
- 229.** a) päätysivu 4 m ja pituus 6 m
b) päätysivu 3 m ja pituus 9 m
(Jos päätyneliön sivun pituus on s ja vajan pituus t , niin $6s + 2t = 36$. Vajan tilavuus muuttujan s funktiona on $V(s) = s^2(18 - 3s)$ ja lattiapinta-ala $A(s) = s(18 - 3s)$, missä $0 \leq s \leq 6$.)
- 230.** kaksinkertainen sivu ja sen kanssa vastakkainen sivu 20 cm, kaksi muuta sivua 30 cm
- 231.** a) 21 euroa/kg b) 31 euroa/kg
(Jos hinnankorotuksen suuruus on x euroa, niin voitto on $f(x) = (120 - 15x)(14 + x)$.)
- 232.** a) nopeudelle 6 500 arkkia/tunti
b) 105 625 arkkia
- 233.** 12 cm ($V(x) = x(36 - x)^2$, missä $0 \leq x \leq 36$.)
- 234.** leveys 25,6 cm, pituus 51,1 cm, korkeus 38,3 cm
(Jos esineen leveys on x , niin tilavuus on $V(x) = x \cdot 2x \cdot (115 - 3x)$, missä $0 \leq x \leq \frac{115}{3}$.)
- 235.** Pallon, jonka säde on 7,1 cm.
(Jos pallon säde on r cm, niin pallon peittämiseen tarvittava vesimäärä saadaan, kun $2r$ -korkeuisen lieriön tilavuudesta $\pi \cdot 10^2 \cdot 2r$ vähennetään pallon tilavuus $\frac{4}{3}\pi r^3$. Säde r on välillä $[0, 10]$.)
- 236.** a) $x(-2x + 6)$, missä $0 \leq x \leq 3$
b) $4\frac{1}{2}$
- 237.** $32\pi \approx 101$
(Jos suorakulmion sivut ovat s ja t , niin $2s + 2t = 12$. Kun suorakulmio pyörittää sivun t ympäri, niin suorakulmion tilavuus muuttujan s (pohjan säteen) funktiona on $V(s) = \pi s^2(6 - s)$, missä $0 \leq s \leq 6$.)
- 238.** $s = 25 \text{ m}$ ja $t = 10 \text{ m}$
(Yhteys muuttujien s ja t välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista: $\frac{s}{20 - t} = \frac{50}{20}$.)
- 239.** $\frac{512\pi}{27} \approx 59,6$
(Voidaan olettaa, että lieriön ja kartion pohjaympyröillä on sama keskipiste ja että lieriön toinen pohja on kartion vaipalla. Yhteys lieriön pohjan säteen ja lieriön korkeuden välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista.)

- 240.** a) $0,001x^2$ (Virhelyöntien lukumäärä minuutissa on kx^2 , missä x on kirjoitusnopeus ja k verrannollisuuskertoimen. Koska $k \cdot 100^2 = 10$, niin $k = 0,001$.)
 b) Nopeudella 500 merkkiä minuutissa, jolloin virheettömien lyöntien määrä on 250. (Virheettömien lyöntien määrä minuutissa on $f(x) = x - 0,001x^2$.)
- 241.** korkeus 13,3 cm ja pohjan halkaisija 17,0 cm (Jos pohjaympyrän säde on r ja varjostimen korkeus h , niin $4\pi r + 4h = 160$. Varjostimen tilavuus muuttujan r funktiona on $V(r) = \pi r^2(40 - \pi r)$.)
- 242.** jokea vastaan kohtisuora sivu 15 m, joen suuntainen sivu 60 m (Jos s on jokea vastaan kohtisuoran sivun pituus ja t joen suuntainen sivu, niin $4s + t = 120$.)
- 243.** kattoneliön sivu 6 m ja korkeus 2 m
- 244.** a) päätykolmion kylki 6 m ja kasvihuoneen pituus 4 m
 b) päätykolmion kylki 4,5 m ja kasvihuoneen pituus 6 m
- 245.** korkeus 75 cm, leveys 105 cm (Jos ikkuna-aukon leveys on s ja korkeus t , niin avoimeksi jäävän osan pinta-ala on $A = (s - 30)t$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $2s + 2t = 360$.)
- 246.** 35 uutta lupaa, keskimääräinen kalansaalus 23 tonnia
- 247.** 240 km:n päässä, jolloin tulot ovat 13 520 rahaa. (Jos vesi myydään x kilometrin päässä keitaalta, niin tulojen suuruus on $f(x) = (100 - 0,2x)(20 + x)$, missä $0 \leq x \leq 500$.)
- 248.** 4 cm
- 249.** 6 cm (Jos poisleikattavan neliön sivun pituus on x , niin laatikon pohjasärmien pituudet ovat x ja $30 - 2x$ ja laatikon korkeus $\frac{1}{2}(24 - x)$. Sivun pituus x on välillä $[0, 15]$.)
- 250.** 0,532 l (Vesimäärä, joka tarvitaan r -säteisen pallon peittämiseen on $f(r) = 10^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3$. Eniten vettä vaatii pallo, jonka säde on $\sqrt{\frac{50}{\pi}}$ cm $\approx 3,989$ cm.)
- 251.** a) $2x(4 - x^2)$, missä $0 \leq x \leq 2$
 b) $\frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6,16$
 c) $4\pi \approx 12,6$
- 252.** 8,0 metriä pitkä ja 0,64 metriä paksu (Yhteys pölkyn poikkileikkausympyrän säteen ja pölkyn pituuden välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista.)
- 253.** Nopeudelle 200 pulloa tunnissa, jolloin saadaan 100 virheetöntä pulloa. (Koneen tunnissa tekemien virheellisten pullojen määrä on kx^2 , missä x on valmistusnopeus ja k verrannollisuuskertoimen. Koska $k \cdot 80^2 = 16$, niin $k = 0,0025$.)
- 254.** a) 100 m b) 0 m (Jos suoran pituus on s ja kentän leveys t , niin $2s + \pi t = 400$.)
- 255.** a) koko lanka ympyräksi
 b) ympyräksi 44,0 cm:n pituinen osa
- 256.** 24 (Voidaan olettaa, että toisen särmiön pohjan kärjet ovat kartion vaipalla. Jos särmiön pohjasärmän pituus on a ja korkeus h , niin yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhteys pohjan lävistäjän $a\sqrt{2}$ ja korkeuden h välille.)

257. Suhde on aina $\frac{4}{9}$. (Voidaan olettaa, että lieriön ja kartion pohjaympyröillä on sama keskipiste ja että lieriön toinen pohja on kartion vai-

palla. Jos lieriön pohjan säde on r ja korkeus h , niin yhdenmuotoista kolmioista saadaan

$$h = \frac{H}{R}(R - r).$$

Lieriön tilavuus muuttujan r funktiona on

$$V(r) = \pi r^2 \frac{H}{R}(R - r) = \pi \frac{H}{R}(Rr^2 - r^3), \text{ missä}$$

$0 \leq r \leq R$. Suurimman lieriön pohjan säde on

$$\frac{2}{3}R \text{ ja korkeus } \frac{1}{3}H.)$$

Funktioiden tulon ja funktion potenssin derivaatta

258. a) $h'(t) = 3t^2(t^2 - 1) + t^3 \cdot 2t = 5t^4 - 3t^2$

259. -8 ($h'(x) = 2xg(x) + x^2g'(x)$)

260. a) $20(5x - 1)^3 (4(5x - 1)^3 \cdot 5)$
 b) $-3(1 - x)^2 (3(1 - x)^2 \cdot (-1))$
 c) $15x^2(x^3 + 6)^4 (5(x^3 + 6)^4 \cdot 3x^2)$
 (Potensseja ei kannata kertoa auki, sillä esimerkiksi nollakohdat on helpompi määrittää, kun lauseke on tulon muodossa.)

261. a) 0 ja 3 b) 0, $\frac{3}{2}$ ja 3

262. -85 ($f'(x) = 5(x^3 - 2)^6 + 90x^3(x^3 - 2)^5$)

263. a) $g'(x) = 2x(4x + 1)^3 + 12x^2(4x + 1)^2$

b) 0, $-\frac{1}{4}$ ja $-\frac{1}{10}$

($g'(x) = 2x(4x + 1)^2(10x + 1)$)

264. a) $(1 - p)^4 p$

b) $\frac{1}{5} = 0,2$

(Kohta, jossa funktio $f(p) = (1 - p)^4 p$, missä $0 \leq p \leq 1$, saa suurimman arvon.)

265. maksimikohta $-\frac{1}{10}$ ja maksimiarvo $\frac{6561}{6250}$,

minimikohta $\frac{1}{2}$ ja minimiarvo 0

($h'(x) = (x + 1)^2(2x - 1)(10x + 1)$)

266. 5

267. a) $3(\frac{1}{2}x - 1)^5$

b) $-24x^2(1 - 4x^3)$

c) $3(3x^2 - 2)(x^3 - 2x)^2$

268. a) -40 b) $-2\,500\,000$

269. funktion $f(x)$ nollakohdat 1 ja 2, derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat 1, $\frac{3}{2}$ ja 2

270. a) -13 b) $y = -13x + 12$

271. a) 13
 ($f'(x) = 2(x + 1)(3x - 1)^5 + 15(x + 1)^2(3x - 1)^4$)
 b) $-1, -\frac{13}{21}, \frac{1}{3}$
 ($f'(x) = (x + 1)(3x - 1)^4(21x + 13)$)

272. a) $10p^2(1 - p)^3$

b) $\frac{2}{5} = 0,4$

273. $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$, $u'(-1) = -14$

274. kohdassa $\frac{m}{m+n}$, suurin arvo $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$

275. lukujen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ keskiarvo

276. $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(Derivoimalla saadaan $2x + 2f(x)f'(x) = 0$,

joten $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$.)

$$277. \text{ a) } f(x) = \sqrt{9-4x^2}, f'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$\text{b) } g'(x) = -\frac{3}{x^4}$$

$$\text{c) } h'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Funktioiden osamäärän derivaatta

$$278. \text{ a) } \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{b) } \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$279. \text{ a) } 0 \text{ ja } 2 \quad (f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2})$$

$$\text{b) } -1 \text{ ja } 3 \quad (g'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2})$$

$$280. \text{ a) } -\frac{1}{3} \quad (f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2})$$

$$\text{b) } y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$281. \text{ a) } \frac{1}{x^2}$$

$$\text{b) } -\frac{5}{3x^3} \quad (\frac{5}{6x^2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{5}{6} \cdot x^{-2})$$

$$\text{c) } -\frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^7} \quad (\frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^6} = x^{-4} - \frac{1}{3}x^{-6})$$

$$282. \text{ a) } -\frac{6}{(3x-2)^3} \quad (\frac{1}{(3x-2)^2} = (3x-2)^{-2})$$

$$\text{b) } \frac{12x}{(4-x^2)^4} \quad (\frac{2}{(4-x^2)^3} = 2 \cdot (4-x^2)^{-3})$$

$$283. \text{ a) } -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{6}{(1-2x)^2}$$

(Voidaan käyttää osamäärän derivointikaavaa tai funktion potenssin derivointikaavaa.)

$$284. \text{ a) } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3} = \frac{-x-8}{x^3}, \text{ nollakohta } -8$$

(Voidaan jakaa ensin termeittäin:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} = x^{-1} + 4x^{-2}$$

tai derivoida osamäärän derivointikaavalla.)

$$\text{b) } g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}, \text{ nollakohdat } -1$$

ja 1 (Voidaan jakaa ensin termeittäin:

$$g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x} = x-2+\frac{1}{x} = x-2+x^{-1},$$

tai derivoida osamäärän derivointikaavalla.)

$$285. \text{ suurin arvo } f(1) = 5, \text{ pienin arvo } f(\frac{1}{2}) = 3$$

$$286. \text{ pisteessä } (-2, 0) \text{ } 76,0^\circ\text{:n kulmassa ja}$$

$$\text{pisteessä } (2, 0) \text{ } 53,1^\circ\text{:n kulmassa}$$

$$(f'(-2) = 4 \text{ ja } f'(2) = \frac{4}{3})$$

$$287. \text{ a) } y = 4 \text{ ja } y = -4$$

$$\text{b) } y = 3x + 2 \text{ ja } y = 3x - 2$$

(Sivumispisteen x -koordinaatti ratkaistaan

yhtälöstä a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = 3$, missä

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}.)$$

$$288. (1, 1) \text{ ja } (-\frac{1}{3}, -3)$$

(Käyrä $xy = 1$ on funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaaja.

Koska $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, käyrän pisteeseen $(a, \frac{1}{a})$

piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a). \text{ Ratkaistaan, millä } a\text{:n ar-}$$

voilla pisteen $(-1, 3)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön.)

$$289. \text{ a) } \frac{3+3x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{b) } \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$$

$$290. -3 \text{ ja } 1$$

291. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

292. Funktio g on määritelty kaikkialla ja derivaat-
tafunktio $g'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$ on positiivinen
kaikkialla muualla paitsi kohdassa 0.

293. a) $-\frac{5}{8}$ b) $\frac{21}{16} \quad (g(t) = t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})$

294. a) $-\frac{12x}{(x^2 - 1)^3} \quad (\frac{3}{(x^2 - 1)^2} = 3 \cdot (x^2 - 1)^{-2})$

b) $\frac{10}{(1 - 5x)^4} \quad (\frac{2}{3(1 - 5x)^3} = \frac{2}{3}(1 - 5x)^{-3})$

c) $\frac{10}{3(1 - 5x)^2}$

295. a) $\frac{7}{4}$ b) 6

296. $f(\frac{4}{3}) = \frac{27}{256}$

297. $(-1, \frac{1}{2})$ ja $(3, -\frac{1}{2})$

298. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

(Paraabelin $y = ax^2 + b$ tulee kulkea pisteiden
 $(-2, 1)$ ja $(2, 1)$ kautta, ja funktioilla

$f(x) = \frac{4}{x^2}$ ja $g(x) = ax^2 + b$ tulee olla sama de-
rivaatta kohdissa -2 ja 2 .)

299. Kolmion pinta-ala on aina 2.

(Käyrälle $y = \frac{1}{x}$ pisteeseen $(a, \frac{1}{a})$ piirretyn

tangentin yhtälö on $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$.

Tangentti leikkaa koordinaattiakselit pisteissä
 $(2a, 0)$ ja $(0, \frac{2}{a})$.)

300. Osoitetaan, että $h'(x_0) = 1$.

301. a) Jos n on negatiivinen, niin $-n$ on positiivinen ja

$$Dx^n = D \frac{1}{x^{-n}} = \frac{0 \cdot x^{-n} - 1 \cdot (-n) \cdot x^{-n-1}}{(x^{-n})^2}.$$

Lauseke sievenee muotoon nx^{n-1} .

b) Jos n on negatiivinen, niin $-n$ on positiivinen ja $Df(x)^n = D \frac{1}{f(x)^{-n}}$. Derivoidaan osa-

määrän derivointikaavan avulla ja sievennetään.

Rationaaliyhtälö ja rationaalifunktion merkki

302. a) $x = 2$ (Nimittäjien poistamisen jälkeen saadaan yhtälö $(5x - 3) - (3x - 1) = x$.)
b) $x = 0$ (Nimittäjien poistamisen jälkeen saadaan yhtälö $x^2 - 1 = x - 1$. Yhtälön toinen juuri $x = 1$ ei kuulu alkuperäisen yhtälön määrittelyjoukkoon.)

303. a) $x = -\frac{2}{3}$ (Nimittäjien poistamisen jälkeen saadaan yhtälö $x^2 - (x + 2) = x(x + 2)$.)
b) $x = 0$ tai $x = 1$ (Nimittäjien poistamisen jälkeen saadaan yhtälö $(x + 1)^2 - (x - 1) = 2(x + 1)$.)

304. a) $-3 < x < 1$ (Funktion arvojen merkki voi vaihtua nollakohdassa 1 ja kohdassa -3 , jossa funktio ei ole määritelty.)
b) $x < 0$ tai $2 < x < 5$ (Funktion arvojen merkki voi vaihtua nollakohdassa 2 ja kohdassa 0 ja 5, joissa funktio ei ole määritelty.)

305. a) $x < -2$ tai $x > 4$ (Epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{3x}{x-4} - 1 > 0$ eli $\frac{2x+4}{x-4} > 0$.
Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat positiivisia.)
b) $0 < x \leq 1$ (Epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{2x-1}{x} - 1 \leq 0$ eli $\frac{x-1}{x} \leq 0$.)

- 306.** a) $x > 0$ (Epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{1}{5x} - \frac{1}{x} < 0$ eli $-\frac{4}{5x} < 0$.)
 b) $x \leq -3$ tai $0 < x \leq 3$ (Epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{9}{x^3} - \frac{1}{x} \geq 0$ eli $\frac{9-x^2}{x^3} \geq 0$.)
- 307.** a) $-1 \leq x < 0$ tai $0 < x \leq 1$
 Epäyhtälö voidaan kertoa lausekkeella x^2 , joka on määrittelyjoukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ positiivinen.
 b) $x < 1$ tai $x > 3$
 Epäyhtälö voidaan kertoa lausekkeella $x^2 + 3$, joka on kaikkialla positiivinen.
 c) $\frac{1}{2} \leq x < 1$ tai $x > 1$
 Epäyhtälö voidaan kertoa lausekkeella $(x-1)^2$, joka on määrittelyjoukossa $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ positiivinen.
- 308.** maksimikohta 1 ja maksimiarvo 2, minimikohta -1 ja minimiarvo -2.
 (Koska derivaattafunktion $f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$ nimittäjä on kaikkialla positiivinen, derivaatan merkin määrää osoittaja $-4x^2 + 4$.)
- 309.** a) aidosti kasvava väleillä $]-\infty, 0[$ ja $[10, \infty[$, aidosti vähenevä välillä $[0, 10]$,
 b) minimikohta 10, minimiarvo 15
 (Derivaattafunktion $f'(x) = 1 - \frac{1000}{x^3} = \frac{x^3 - 1000}{x^3}$ merkki vaihtuu myös kohdassa $x = 0$. Funktio ei ole määriteltävy kohdassa $x = 0$, joten kohta ei ole funktion f ääriarvokohta.)
- 310.** Pisteisiin $(-3, -\frac{1}{4})$ ja $(1, -\frac{1}{4})$.
 (Ratkaistaan, millä muuttujan arvolla funktion $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{x+1}$ derivaattafunktion $f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{(x+1)^2}$ arvo on yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin $\frac{1}{2}$.)
- 311.** a) $x = \frac{1}{2}$ (Yhtälö kerrotaan lausekkeella $x(1-x)$ tai lauseke saatetaan laventamalla yhteiseksi nimittäjäksi.)
 b) $t = 0$ tai $t = -2$
- 312.** a) $x = 0$ tai $x = 4$ b) $x = \frac{1}{2}$
- 313.** a) $x = 1$ b) Ei millään.
- 314.** a) $x < 0$ tai $x > 3$
 b) $-2 < x < 0$ tai $x > 2$
- 315.** a) $2 < x \leq \frac{11}{3}$ b) $x > 2$
- 316.** a) $x < 0$ tai $x \geq \frac{1}{2}$
 (Epäyhtälö $\frac{1}{x} \leq 2$ eli $\frac{1-2x}{x} \leq 0$.)
 b) $x < -1$ tai $0 < x < 1$
 (Epäyhtälö $x < \frac{1}{x}$ eli $\frac{x^2-1}{x} < 0$.)
- 317.** $x < 2$ tai $2 < x < 3$
- 318.** maksimikohta 0 ja maksimiarvo 0, minimikohta 4 ja minimiarvo 8
- 319.** a) aidosti kasvava välillä $[-8, 0[$ ja aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, -8]$ ja $[0, \infty[$
 b) minimikohta -8, minimiarvo $-\frac{1}{2048}$
- 320.** leikkauspisteet $(1, 1)$ ja $(-\frac{2}{3}, -4)$. Käyrät leikkaavat kohtisuorasti pisteessä $(1, 1)$.
- 321.** a) $p = 0$ tai $p = -6$
 b) $x = 3$
- 322.** $-1 < x < 0$ tai $x > 0$
- 323.** Funktiolla on ääriarvoja, kun $b > 0$. Ääriarvot ovat maksimiarvo $-2\sqrt{b}$ kohdassa $-\sqrt{b}$ ja minimiarvo $2\sqrt{b}$ kohdassa $\sqrt{b}$.

Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo – sovelluksia

324. 2 (Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pienin arvo välillä $]0, \infty[$.)

325. joen suuntainen sivu 77,5 m, jokea vastaan kohtisuorat sivut 38,7 m
(Jos s on joen suuntaisen sivun pituus metreinä ja t jokea vastaan kohtisuoran sivun pituus, niin aidan tarve on $p = s + 2t$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $st = 3000$, joten $p(s) = s + \frac{6000}{s}$, missä $s > 0$.)

326. pohjasärmä 12,6 cm, korkeus 6,3 cm
(Jos särmiön pohjasärmän pituus on a desimetriä ja korkeus h , niin pellin tarve on $A = a^2 + 4ah$. Koska astian tilavuus on 1 dm^3 , niin $a^2h = 1$.)

327. pohjan halkaisija ja korkeus 6,8 cm, eli sivusta katsottuna tölkki on neliön muotoinen.
(Jos lieriön pohjan säde on r desimetriä ja korkeus h , niin pellin tarve on $2\pi r^2 + 2\pi rh$. Koska tölkin tilavuus on $0,25 \text{ dm}^3$, niin $\pi r^2 h = 0,25$.)

328. päätyneliön sivut 3,5 m, pituus 5,3 m
(Jos päätyneliön sivun pituus s metriä ja vajan pituus t metriä, niin putken tarve on $6s + 2t$. Koska vajan tilavuus on 65 m^3 , niin $s^2t = 65$.)

329. Katua vastaan kohtisuoran sivun pituus 40,2 m ja kadun suuntainen sivu 28,7 m.
Tontin pinta-ala on 1150 m^2 .
(Jos tontin kadun suuntainen sivu on s metriä ja katua vastaan kohtisuora sivu on t , niin pinta-ala $A = st$. Koska rakennuksen pohjan pinta-ala on 490 m^2 , niin $(s - 10)(t - 14) = 490$, josta $t = \frac{490}{s - 10} + 14$ ja $A(s) = \frac{490s}{s - 10} + 14s$.

Hieman yksinkertaisemmalla laskulla päästään, jos lähtökohdiksi valitaan rakennuksen sivujen pituudet: jos rakennuksen kadun suuntaisen sivun pituus on s ja katua vastaan kohtisuoran sivun pituus t , niin $A = (s + 10)(t + 14)$ ja $st = 490$.)

330. $a = 20 \text{ cm}$ ja $h = 40 \text{ cm}$
(Hukkapalaa jää vähiten, kun kolmion pinta-ala $A = \frac{ah}{2}$ on mahdollisimman pieni.
Yhteys muuttujien a ja h välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista: $\frac{h - 20}{h} = \frac{10}{a}$.

Jos muuttujaksi valitaan h , saadaan

$$A(h) = \frac{5h^2}{h - 20}, \text{ missä } h > 20.$$

Jos muuttujaksi valitaan a , saadaan

$$A(a) = \frac{10a^2}{a - 10}, \text{ missä } a > 10.$$

331. a) Suurinta pinta-alaa ei ole.
(Muuttujaksi kannattaa valita x -akselilla olevan sivun toisen päätepisteen x -koordinaatti x . y -akselilla olevan sivun pituus on käyrällä olevan kärjen y -koordinaatti $\frac{1}{x + 1}$. Suorakul-

mion pinta-ala on $A(x) = \frac{x}{x + 1}$, missä $x > 0$.

Derivaattafunktiosta nähdään, että funktio $A(x)$ on aidosti kasvava. Koska $x < x + 1$, kun x on positiivinen, niin pinta-ala on kuitenkin aina pienempi kuin 1.)

b) $\frac{\pi}{4} \quad (V(x) = \pi \cdot \left(\frac{1}{x + 1}\right)^2 \cdot x)$

332. pohjan halkaisija $\frac{3}{2}s$ ja korkeus $6s$

(Voidaan olettaa, että lieriön toinen pohja on kartion pohjalla ja toinen pohja vaipalla.

Jos r on kartion pohjan säde ja h on kartion korkeus, niin $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Yhteys muuttujien r ja h välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista.)

333. $\sqrt[3]{2}$

334. pohjasärmä 11,0 cm, korkeus 16,5 cm

335. päätyneliön sivut 1,5 m ja vajan pituus 2,0 m
(Jos päätyneliön sivun pituus on s metriä ja vajan pituus on t , niin pellin tarve on $A = 2s^2 + 3st$ ja $s^2t = 4,5$.)

- 336.** neliöllä
(Oletetaan, että suorakulmion pinta-ala on A . Jos sivut ovat s ja t , niin piiri on $p = 2s + 2t$, missä $s = \frac{A}{t}$.)
- 337.** päätykolmion kylki 4,9 m ja kasvihuoneen pituus 9,9 m
(Jos päätykolmion kyljen pituus on s metriä ja kasvihuoneen pituus t , niin tilavuus $V = \frac{1}{2}s^2t = 120$ ja putken tarve $4s + t$.)
- 338.** leveys (päätyisivujen pituus) 20 m ja pituus 30 m
(Jos altaan leveys (päätyisivujen pituus) on s metriä ja altaan pituus t , niin laatoitettavan alueen pinta-ala on $A = (s + 4)(t + 6) - 600$, missä $st = 600$.)
- 339.** $y = -\frac{3}{2}x + 6$
(Muuttujaksi kannattaa valita suoran kulma-kerroin k , missä $k < 0$. Suoran yhtälö on $y - 3 = k(x - 2)$ ja suora leikkaa koordinaatti-akselit pisteissä $(2 - \frac{3}{k}, 0)$ ja $(0, 3 - 2k)$.)
- 340.** a) 1 (Muuttujaksi kannattaa valita positiivisella x -akselilla olevan kärkipisteen x -koordinaatti. Tällöin pinta-ala on $A(x) = 2x \cdot \frac{1}{1 + x^2}$, missä $x > 0$.)
b) Suurinta ei ole. (Tilavuus on kuitenkin aina pienempi kuin π .)
c) $\frac{3\pi\sqrt{3}}{8}$
- 341.** pohjan halkaisija $\frac{3\sqrt{2}}{2}s$, korkeus $3s$
(Voidaan olettaa, että kuution yksi tahko on kartion pohjalla ja vastakkaisen tahkon kärjet kartion vaipalla. Kuutio ja kartio leikataan tasolla, joka kulkee pitkin näiden tahkojen lävis-täjiä. Yhteys ympyräkartion pohjan säteen r ja korkeuden h välille saadaan muodostuvista yhdenmuotoisista kolmioista: $\frac{h-s}{h} = \frac{s\sqrt{2}}{2r}$.)

- 342.** a) $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3})$ ja $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3})$
(Paraabelille $y = 4 - x^2$ pisteeseen $(a, 4 - a^2)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - (4 - a^2) = -2a(x - a)$. Tangentti leikkaa x -akselin pisteessä $(\frac{4 + a^2}{2a}, 0)$ ja y -akselin pisteessä $(0, 4 + a^2)$. Symmetrian vuoksi las-kuissa voidaan olettaa, että $a > 0$.)
b) 9π (Tilavuus on pienin, kun $a = \sqrt{2}$.)
- 343.** a) pohjan säde ja lieriön korkeus 57,6 cm
(Jos lieriön pohjan säde on r metriä ja korkeus h , niin levyn tarve on $A = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2$, missä $\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 1$. Levyn tarve muuttujan r funktiona sievenee muotoon $A(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2}{r}$.)
b) Säiliö on puolipallo, jonka pohjan säde on 78,2 cm.

Kertaustehtäviä

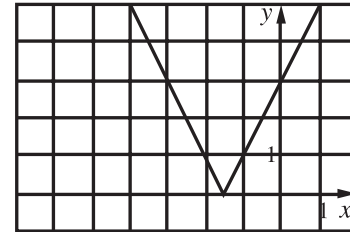
- 344.** a) $\mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- 345.** a) $\frac{3x}{5x+1}$ b) 3
c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{x}{3}$
- 346.** a) $\frac{x}{x-1}$ b) $\frac{x-1}{x+1}$
c) Ei supistu.
- 347.** Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.
Supistettu lauseke $\frac{x+2}{x-4}$ määrittelee funktion, jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- 348.** a) $\frac{4}{3x}$ b) $\frac{1-3x^2}{x}$
c) $\frac{-t^2+2t-1}{t^2}$

349. a) $\frac{-t+6}{t-3}$ b) $\frac{t+5}{(t-3)(t+1)}$
 c) $\frac{1}{x+1}$ d) $\frac{-t^2-1}{(1-t)^2}$
350. a) x b) $\frac{x^3}{(x+3)^2}$
351. a) $\frac{x+1}{x}$ b) $-x$ c) $-\frac{x+1}{x}$
352. a) $\frac{1}{3}$ (Sijoitetaan $x=0$.)
 b) $2 \left(\frac{x^2+6x}{3x} = \frac{x(x+6)}{3x} = \frac{x+6}{3} \right)$
 c) Ei raja-arvoa. (Lauseke ei ole kohdassa 0 ”muotoa $\frac{0}{0}$ ”.)
353. a) 10
 b) $2 \left(\frac{3x^2-12}{3x^2+6x} = \frac{3(x+2)(x-2)}{3x(x+2)} = \frac{x-2}{x} \right)$
354. a) $-1 \left(\frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{-x}{x+1} \right) = -\frac{1}{x+1} \right)$
 b) $\frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{3}{x} \right) : (x-3) = \frac{x-3}{x} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x} \right)$
 c) -2
 $\left(\frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1-x^2}{x^2} = -\frac{1+x}{x^2} \right)$
355. Koska funktio f on jatkuva välillä $[1, 2]$ ja koska luku -50 on arvojen $f(1) = 3$ ja $f(2) = -58$ välissä, niin funktio saa jossakin välin $]1, 2[$ kohdassa arvon -50 .
356. a) Yhtälön $x^5 = 200x^3 + 80$ juuret ovat funktion $f(x) = x^5 - 200x^3 - 80$ nollakohtia. Koska funktio f on jatkuva välillä $[14, 15]$ ja koska arvot $f(14) = -11056$ ja $f(15) = 84295$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on nollakohta välillä $]14, 15[$.
 b) 14,1 (Haarukoimalla havaitaan, että $f(14,1) < 0$ ja $f(14,15) > 0$.)

357. $f(3) = 1$

(Tulee olla $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{6x-18}$.)

358.
$$f(x) = \begin{cases} -2x-3, & \text{kun } x < -\frac{3}{2} \\ 2x+3, & \text{kun } x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$$



Funktio f on jatkuva.

(Kuvaaja voidaan laatia niin, että funktion f kuvaajan (suoran $y = 2x + 3$) x -akselin alapuolinen osa peilataan x -akselin suhteen.)

359. a) 1
 b) $f'(-1) = 2$, $f'(1) = 0$, $f'(3) = -2$
 c) $x < 1$
360. a) 10 cm/viikko ja 2,5 cm/viikko
 b) 4,5 viikon kuluttua, noin 30 cm/viikko
361. Ei derivoituva kohdissa -2 ja 1 .
 Kun $x < -2$, niin $f'(x) = 0$.
 Kun $-2 < x < 1$, niin $f'(x) = 2$.
 Kun $x > 1$, niin $f'(x) = -\frac{1}{3}$.
362. 4 (Kuvion avulla nähdään, että $f(3) = 4$.
 Välillä $[3, \infty[$ funktio on vakiofunktio 4.)

$$363. \quad a) \quad f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7 - 16}{x - 3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

$$b) \quad g'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{6}{x} - 2}{x - 3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\left(\frac{6}{x} - 2 \right) : (x - 3) \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6 - 2x}{x} \cdot \frac{1}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{2}{x} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$364. \quad a) -2 \quad b) 3 \, 995$$

$$365. \quad a) \quad \frac{20x^7}{3} \quad \left(\frac{5x^8}{6} = \frac{5}{6}x^8 \right) \quad b) 0$$

$$c) \quad x^3 - \frac{1}{6}x \quad \left(\frac{3x^4 - x^2}{12} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^2 \right)$$

$$366. \quad a) 130 \text{ cm}^2/\text{s} \quad b) 380 \text{ cm}^2/\text{s} \\ (\text{Pallon pinnan ala } t \text{ sekunnin kuluttua on } A(t) = 4\pi t^2. \text{ Lasketaan derivaattafunktion } A'(t) \text{ arvot } A'(5) \text{ ja } A'(15).)$$

$$367. \quad a) \quad y = -9x - 12 \\ (\text{Kulmakerroin on funktion } f(x) = -x^3 + 3x^2 - 7 \text{ derivaatta kohdassa } -1. \text{ Käyrän piste on } (-1, -3).)$$

$$b) \quad y = \frac{1}{9}x - \frac{26}{9}$$

$$368. \quad \text{Kuvaajan pisteeseen } (x, f(x)) \text{ piirretty kuvaajan tangentti on suoran } y = -\frac{4}{3}x + 1 \text{ suuntainen, jos } f'(x) = -\frac{4}{3}. \\ \text{Kun } f(x) = x^3 - x^2 - x + 3, \text{ niin } f'(x) = 3x^2 - 2x - 1. \text{ Määrittämällä yhtälön diskriminantti tai ratkaisemalla yhtälö nähdään, että yhtälöllä } 3x^2 - 2x - 1 = -\frac{4}{3} \text{ eli yhtälöllä } 9x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ on yksi juuri.}$$

$$369. \quad (5; 12,5) \quad (\text{Huipun } x\text{-koordinaatti on funktion } f(x) = -0,5x^2 + 5x \text{ derivaattafunktion nollakohta.})$$

$$370. \quad a = 13 \quad (\text{Huipun } x\text{-koordinaatti on } 3. \text{ Huipun } y\text{-koordinaatti on } 4, \text{ kun } 3^2 - 6 \cdot 3 + a = 4.)$$

$$371. \quad 78,7^\circ \quad (\text{Käyrä leikkaa } x\text{-akselin pisteessä } (1, 0). \text{ Funktion } f \text{ derivaatta kohdassa } 1 \text{ on } 5. \text{ Siis } \tan \alpha = 5.)$$

$$372. \quad \text{Ratkaisemalla yhtälö } x^3 + x^2 + 5 = x^3 + 2x + 4 \text{ nähdään, että kuvaajilla on yhteinen piste, jonka } x\text{-koordinaatti on } 1. \text{ Koska funktioiden derivaatat kohdassa } 1 \text{ ovat yhtä suuret } (f'(1) = g'(1) = 5), \text{ käyrät sivuavat toisiaan yhteisessä pisteessään.}$$

$$373. \quad a) \quad \text{Derivaattafunktio } g'(x) = 5x^4 + 45x^2 \text{ on parillisten potenssien summa, joten se on kaikkialla epänegatiivinen ja nolla vain kohdassa } 0.$$

$$b) \quad \text{Derivaattafunktion } h'(x) = -9x^2 + 12x - 4 \text{ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Koska derivaattafunktiolla on vain yksi nollakohta } \frac{2}{3}, \text{ derivaattafunktio on yhtä kohtaa lukuunottamatta negatiivinen.}$$

$$374. \quad f(3) \quad (\text{Derivaattafunktion } f'(x) = x^2 - 6x + 5 \text{ merkeistä nähdään, että funktio } f \text{ on aidosti vähenevä välillä } [1, 5]. \text{ Siis arvo vasemmanpuoleisessa kohdassa } 3 \text{ on suurempi.})$$

$$375. \quad a) \quad \text{aidosti kasvava välillä }]-\infty, -56] \text{ ja aidosti vähenevä välillä } [-56, \infty[\\ (\text{Derivaattafunktion merkki voidaan perustella laskemalla derivaattafunktion arvoja tai vetoamalla derivaattafunktion kuvaajaan (laskeva suora). Funktion } f \text{ kasvaminen ja väheneminen voidaan myös perustella tutkimatta derivaattafunktion merkkiä: funktion } f \text{ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio on aidosti kasvava huipun vasemmalla puolella ja aidosti vähenevä huipun oikealla puolella.}) \\ b) \quad \text{maksimikohta } -56 \text{ ja maksimiarvo } 136$$

- 376.** aidosti kasvava välillä $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$, aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, -\frac{1}{5}]$ ja $[\frac{1}{5}, \infty[$, minimikohta $-\frac{1}{5}$, maksimikohta $\frac{1}{5}$
- 377.** kaksi (Tutkitaan funktion $f(x) = x^8 - 8x - 1000$ nollakohtien lukumäärää. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 1]$ ja aidosti kasvava välillä $[1, \infty[$. Siis funktiolla f on enintään yksi nollakohta välillä $]-\infty, 1]$ ja enintään yksi nollakohta välillä $[1, \infty[$. Löytämällä kummaltakin väliltä kohdat, joissa funktion arvot ovat erimerkkiset (esimerkiksi $f(-3) = 5585$ ja $f(0) = -1000$ sekä $f(2) = -760$ ja $f(3) = 5537$) osoitetaan, että funktiolla on nollakohta kummallakin välillä.)
- 378.** -22 (Fuktiolla f on minimikohta 5 ja maksimikohta 1 . Koska maksimiarvo $f(1) = 7 + a$, niin $a = 3$.)
- 379.** a) Suurinta arvoa ei ole, pienin arvo on -16 .
b) $[-16, \infty[$
(Pienin arvo on paraabelin huipun y -koordinaatti. Kohta, jossa funktio saa pienimmän arvon voidaan määrittää myös kulkukaavion avulla.)
- 380.** a) $f(-10) = -3\,000$ (Ainoa mahdollinen kohta kulkukaavion perusteella.)
b) $f(-10) = -3\,000$ (Kulkukaavion perusteella mahdollisia kohtia ovat -10 ja 19 .)
- 381.** suurin arvo 0 ja pienin arvo $-\frac{3}{8}$
- 382.** Epäyhtälö $x^4 + 10x^2 \geq 8x^3 - 125$ on yhtäpitävä epäyhtälön $x^4 - 8x^3 + 10x^2 \geq -125$ kanssa. Koska funktion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2$ pienin arvo on $f(5) = -125$, niin $f(x) \geq -125$ kaikilla x .
- 383.** $a = -240$ (Funktion f suurin arvo välillä $[-9, 9]$ on $f(-5) = 250 + a$.)
- 384.** luvun $x = \frac{2}{3}$ (Kohta, jossa funktio $f(x) = x^2 - x^3$ saa välillä $]0, \infty[$ suurimman arvon.)
- 385.** pohjasärmä 3 cm ja korkeus 6 cm
(Jos pohjasärmän pituus on s senttimetriä ja korkeus t , niin tilavuus $V = s^2t$. Yhteys muuttujien s ja t välillä on $8s + 2t = 36$. Muuttujaksi kannattaa valita s , jolloin $V(s) = s^2(18 - 4s)$, missä $0 \leq s \leq 4,5$.)
- 386.** pohjasärmä $11,4$ cm ja korkeus $17,1$ cm
(Jos pohjasärmä on s senttimetriä ja korkeus t , niin vaipan ja yläpohjan yhteenlaskettu pinta-ala on $A = 4st + s^2$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $8s + 4t = 160$. Muuttujaksi kannattaa valita s , jolloin $A(s) = 4s(40 - 2s) + s^2$, missä $0 \leq s \leq 20$.)
- 387.** 36 mökkiä, jolloin vuokratulot ovat $12\,960$ euroa.
(Jos rakennetaan x mökkiä lisää, niin mökkien määrä on $30 + x$ ja yhdestä mökistä saatavat vuokratulot ovat $420 - 10x$. Kokonaistulojen määrä on $f(x) = (30 + x)(420 - 10x)$.)
- 388.** 5 cm (Jos pois leikatun neliön sivun pituus on x cm, niin muodostuvan laatikon tilavuus on $V(x) = x(30 - 2x)^2$, missä $0 \leq x \leq 15$.)
- 389.** pohjan halkaisija ja korkeus molemmat $38,3$ cm (Jos lieriön pohjan säde on r senttimetriä ja korkeus h , niin $V = \pi r^2 h$. Muuttujien r ja h välillä on yhteys $4r + h = 115$. Muuttujaksi kannattaa valita r .)

390. $\frac{3}{8}$ (Olkoon x positiivisella x -akselilla olevan sivun toisen päätepisteen x -koordinaatti. Tällöin suorakulmion sivujen pituudet ovat x ja $1 - 2x^3$ ja $A(x) = x(1 - 2x^3)$, missä $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Funktio $A(x)$ saa välillä suurimman arvon kohdassa $\frac{1}{2}$.)

391. a) $h'(x) = f(x) + xf'(x)$
b) -2

392. a) $15(5x - 1)^2$
b) $-5(1 - x)^4$
c) $10x(x^2 - 3)^4$

393. a) $f'(x)$
 $= 6(3x + 1)(4x - 1)^2 + 8(3x + 1)^2(4x - 1)$
b) $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{24}$ ja $\frac{1}{4}$
 $(f'(x) = (3x + 1)(4x - 1)(48x + 2))$

394. a) $\frac{1}{(3x + 1)^2}$, ei nollakohtia
b) $\frac{-4x^2 + 16}{(x^2 + 4)^2}$, nollakohdat -2 ja 2
(Murtolausekkeen arvo on nolla, kun osoittajan arvo on nolla.)

395. a) $\frac{3}{2x^2}$ ($-\frac{3}{2x} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \cdot x^{-1}$)
b) $-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{-x^2 + 3}{x^4}$ (Voidaan derivoida osamäärän derivointikaavalla tai voidaan jakaa ensin termeittäin:
 $\frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = x^{-1} - x^{-3}$)
c) $2x + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^5}$
 $((x - \frac{1}{x^2})^2 = x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4} = x^2 - 2 \cdot x^{-1} + x^{-4})$

396. a) $-\frac{30}{(2x - 1)^6}$ ($\frac{3}{(2x - 1)^5} = 3(2x - 1)^{-5}$)
b) $\frac{x}{(1 - x^2)^4}$ ($\frac{1}{6(1 - x^2)^3} = \frac{1}{6}(1 - x^2)^{-3}$)
c) $\frac{2x}{(1 - x^2)^2}$

397. $(-1, 2)$ ja $(-5, -2)$
(Pisteen x -koordinaatti saadaan, kun ratkaistaan, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = \frac{4}{x + 3}$ derivaatta on -1 eli $-\frac{4}{(x + 3)^2} = -1$. Yhtälö toteutuu, kun $(x + 3)^2 = 4$ eli kun $x + 3 = 2$ tai $x + 3 = -2$.)

398. a) $x = -1$ (Nimittäjien poistamisen jälkeen saadaan yhtälö $2x - (x - 1) = 0$.)
b) $x = 4$ tai $x = -\frac{3}{2}$
 $(6(x + 2) + 3x = 2x(x + 2))$

399. a) $x = 0$ ($x + 1 - (x + 3) = 2(x - 1)$)
b) $x = \frac{1}{3}$ ($x - 1 = 3(x^2 - x)$)
c) $x = 0$ tai $x = 2$
 $(x(x - 1) - (x + 1) = -(x - 1)^2)$

400. a) $x < 0$ tai $x > 3$
b) $x < -5$ tai $x > -3$

401. a) $x < -1$ tai $x > 3$ ($\frac{2x - 6}{x + 1} > 0$)
b) $x > -1$ ($-\frac{1}{x + 1} < 0$ eli $\frac{1}{x + 1} > 0$)
c) $x \leq 0$ tai $1 < x \leq 2$ ($\frac{-x^2 + 2x}{x - 1} \geq 0$)

402. a) $x < 0$ tai $0 < x \leq \frac{4}{3}$
(Epäyhtälö voidaan kertoa lausekkeella x^2 , joka on epäyhtälön määrittelyjoukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ positiivinen. Saadaan epäyhtälö $4 \geq 3x$.)
b) $x \leq 1$ tai $x \geq 2$
(Epäyhtälö voidaan kertoa lausekkeella $x^2 + 2$, joka on kaikkialla positiivinen. Saadaan epäyhtälö $3x \leq x^2 + 2$.)

403. aidosti kasvava välillä $]0, 24]$, aidosti vähenevä väleillä $] -\infty, 0[$ ja $[24, \infty[$, maksimiarvo $\frac{1}{48}$ kohdassa 24

(Derivaatafunktion

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{24}{x^3} = \frac{-x + 24}{x^3} \text{ merkki voi vaihtua nollakohdassa } 24 \text{ ja kohdassa } 0, \text{ jossa funktio ei ole määritelty. Laaditaan derivaatafunktion } f'(x) \text{ merkkikaavio ja täydennetään se funktion } f \text{ kulkukaavioksi.)}$$

404. maksimikohta 0 ja maksimiarvo 0, minimikohta 6 ja minimiarvo 12

(Derivaatafunktion $f'(x) = \frac{x^2 - 6x}{(x - 3)^2}$ nimittäjä

on funktion koko määrittelyjoukossa $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ positiivinen, joten derivaatafunktion merkit määrää osoittaja $x^2 - 6x$.)

405. pohjasärmät 24,7 cm, korkeus 49,3 cm (Jos pohjasärmän pituus on s senttimetriä ja korkeus t , niin teräslangan tarve on $p = 8s + 2t$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $s^2t = 30$. Langan tarve muuttujan s funktiona on $p(s) = 8s + \frac{60}{s^2}$, missä $s > 0$.)

406. pohjan halkaisija 8,6 cm, korkeus 17,2 cm (Jos lieriön pohjaympyrän säde on r desimetriä ja korkeus h , niin pellin tarve on $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$. Muuttujien r ja h välillä on yhteys $\pi r^2 h = 1$. Pellin tarve muuttujan r funktiona on $A(r) = 4\pi r^2 + \frac{2}{r}$, missä $r > 0$.)

407. leveys 25 cm, korkeus 20 cm (Jos arkin leveys on s senttimetriä ja korkeus t , niin kirjoitusala on $A = (s - 5)(t - 4)$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $st = 500$. Jos muuttujaksi valitaan t , niin $A(t) = (\frac{500}{t} - 5)(t - 4)$, missä $t > 4$.)

Sarja A

- $-3 < x < -1$ (Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $\frac{x+3}{x+1} < 0$ kanssa. Funktio $\frac{x+3}{x+1}$ voi vaihtaa merkkiään nollakohdassa -3 ja kohdassa -1 , jossa funktio ei ole määritelty. Laskemalla funktion arvoja nähdään, että arvot ovat negatiivisia välillä $] -3, -1[$.)
- Koska funktion $f(x) = x^9 + x^7 - 1$ arvot $f(0,9165)$ ja $f(0,9175)$ ovat erimerkkiset, funktiolla on nollakohta välillä $]0,9165; 0,9175[$. Koska derivaatafunktio $f'(x) = 9x^8 + 7x^6$ on kaikkialla epänegatiivinen ja nolla vain kohdassa 0, funktio f on kaikkialla aidosti kasvava, eikä sillä voi olla enempää kuin yksi nollakohta.
- päätyneliön leveys ja korkeus 2,58 m, vajan pituus 5,16 m (Jos päätyneliön sivu on s metriä ja vajan pituus t , niin vajan tilavuus on $V = s^2t$. Koska peltiä on 40 m^2 , niin $2s^2 + 2st = 40$. Valitaan muuttujaksi s , jolloin $t = \frac{20 - s^2}{s}$. Muuttujan s arvojen tulee olla positiivisia ja enintään $\sqrt{20}$ (kaikki pelti päätyihin). Vajan tilavuus muuttujan s funktiona on $V(s) = s^2 \cdot \frac{20 - s^2}{s} = 20s - s^3$, missä $0 < s \leq \sqrt{20}$. Derivaatafunktiolla $V'(s)$ on määrittelyvälillä nollakohta $\sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2,58$. Suurin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)
- pääkatuun rajoittuva sivu 24,5 m ja sivukatuun rajoittuva sivu 49,0 m (Jos pääkatuun rajoittuvan sivun pituus on s metriä ja sivukatuun rajoittuvan sivun pituus t , niin rakentamiskelpoisen alueen pinta-ala on $A = (s - 5)(t - 10)$. Koska $st = 1200$, niin pinta-ala muuttujan s funktiona on $A(s) = (s - 5)(\frac{1200}{s} - 10)$, missä $s > 5$.)

5. Osoitetaan, että nimittäjällä

$g(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 5$ ei ole nollakohtia. Kulkukaaviosta nähdään, että funktion g pienin arvo on jompikumpi arvoista $g(0)$ ja $g(2)$. Koska $g(0) = 5$ ja $g(2) = 1$, funktion g pienin arvo on 1. Koska funktion g pienin arvo on positiivinen, funktiolla g ei ole nollakohtia.

6. $\frac{1}{6}$ (Pisteeseen (a, a^3) asetetun tangentin yhtälö on $y - a^3 = 3a^2(x - a)$ ja normaalin yhtälö $y - a^3 = -\frac{1}{3a^2}(x - a)$. Tangentti leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -2a^3)$ ja normaali pisteessä $(0, a^3 + \frac{1}{3a})$. Kolmion pinta-ala on a :n merkistä riippumatta $\frac{1}{2}(3a^4 + \frac{1}{3})$. Funktion $\frac{1}{2}(3a^4 + \frac{1}{3})$ raja-arvo kohdassa 0 on $\frac{1}{6}$.)

Sarja B

1. $x = 1$ (Koska $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, niin nimittäjästä vapaudutaan kertomalla yhtälö lausekkeella $(x + 2)(x - 2)$ tai laventamalla tämä myös vasemman puolen nimittäjäksi. Saadaan yhtälö $x(x + 2) - (x - 2)^2 = 2$.)
2. 63 metrin korkeudella (Paraabelin $y = x - 0,004x^2$ huipun y -koordinaatti. Huipun x -koordinaatti on funktion $f(x) = x - 0,004x^2$ derivaattafunktion nollakohta 125.)
3. kahdeksan päivän kuluttua (Jos perunat myydään x päivän kuluttua, niin perunoiden määrä on $120 + 8x$ kilogrammaa ja kilohinta on $6,20 - 0,2x$ euroa. Perunoiden myynnistä saatava rahamäärä on $f(x) = (120 + 8x)(6,20 - 0,2x)$.)

4. Kuvaajalle pisteeseen $(1, 4)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(1) = 1$. Tangentin yhtälö on $y = x + 3$. Ratkaisemalla yhtälö $-2x^3 + 4x^2 - x + 3 = x + 3$ nähdään, että suora $y = x + 3$ leikkaa kuvaajan myös muuttujan arvon 0 kohdalla. Koska $f'(0) = -1$, leikkauspisteeseen piirretty tangentti on kohtisuorassa suoraa $y = x + 3$ vastaan.

5. Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$(x + 1)^4 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{16} \geq 0 \text{ kanssa. Tutkitaan funkti-}$$

$$\text{on } f(x) = (x + 1)^4 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{16} \text{ kulkua.}$$

Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x) = 4(x + 1)^3 - \frac{1}{2}.$$

Derivaatta on 0, kun

$$(x + 1)^3 = \frac{1}{8} \text{ eli kun } x = -\frac{1}{2}.$$

Kulkukaaviosta nähdään, että arvo $f(-\frac{1}{2}) = 0$ on

funktion f pienin arvo. Koska funktion f pienin arvo on 0, funktion kaikki arvot ovat epänegatiivisia.

6. yksi (Kohta 1 on funktion f'' nollakohta. Selvittämällä funktion f'' kulku nähdään, että $f''(x) < 0$, kun $x < 1$, ja $f''(x) > 0$, kun $x > 1$. Siis $f'(1)$ on derivaattafunktion f' pienin arvo. Koska pienin arvo $f'(1)$ on positiivinen, funktio f' on kaikkialla positiivinen. Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on enintään yksi nollakohta. Funktio f on parittoman (viiden) asteen polynomifunktio, joten se saa erimerkkisiä arvoja lukusuoran eri äärilaidoilla. Funktiolla f on siis ainakin yksi nollakohta.)

Sarja C

- 5
 - $\frac{1}{5}$ (Koska $f(x)$ on positiivinen kaikilla x , niin $\frac{1}{f(x)}$ on suurin, kun $f(x)$ on pienin.)
- 12 vuorokautta (Kohta päätellään funktion f kulkukaaviosta.)
 - 17 % (funktion arvo $f(12)$)
 - 6 vuorokauden kuluttua (Kohta, jossa derivaattafunktion f' arvo on suurin.)
- 5 cm (Jos leikatun suorakulmion lyhyemmän sivun pituus on x , niin laatikon pohjasärmät ovat $40 - 2x$ ja $50 - 4x$. Laatikon tilavuus on $V(x) = x(40 - 2x)(50 - 4x)$, missä $0 \leq x \leq 12,5$.)
- $\frac{x_1 + x_2}{2}$ (Koska pisteet $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ ovat paraabelilla $y = ax^2$, niin $y_1 = ax_1^2$ ja $y_2 = ax_2^2$. Pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$. Ratkaistaan, millä x :n arvolla funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta on yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin.)
- kun $a \leq -\frac{1}{4}$ tai $a \geq \frac{1}{4}$
(Jos $a = 0$, niin funktion f kuvaaja on paraabeli, joten funktio ei ole aidosti monotoninen.
Jos $a \neq 0$, niin derivaattafunktion $f'(x) = ax^2 + x + 4a$ kuvaaja on paraabeli. Derivaattafunktion kaikki arvot ovat samanmerkkiset (mahdollisesti yksi nollakohta), kun toisen asteen yhtälön $ax^2 + x + 4a = 0$ diskriminantti $D = 1 - 16a^2$ on negatiivinen tai 0.)

- pisteisiin $(a, (a - 1)^2)$, missä $-1 < a < 1$,
 suurin pinta-ala on $\frac{8}{27}$
 (Käyrän pisteeseen $(a, (a - 1)^2)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - (a - 1)^2 = 2(a - 1)(x - a)$. Tangentti leikkaa x -akselin pisteessä $(\frac{1}{2}(a + 1), 0)$ ja y -akselin pisteessä $(0, 1 - a^2)$.
 Piste $(\frac{1}{2}(a + 1), 0)$ on positiivisella x -akselilla, kun $a > -1$. Piste $(0, 1 - a^2)$ on positiivisella y -akselilla, kun $-1 < a < 1$. Molemmat pisteet ovat positiivisilla akseleilla, kun $-1 < a < 1$.
 Kolmion pinta-ala on $A(a) = \frac{1}{4}(a + 1)(1 - a^2)$.
 Funktiota voidaan tutkia suljetulla välillä $[-1, 1]$. Funktio $A(a)$ saa suurimman arvon kohdassa $\frac{1}{3}$.)

Sarja D

- Raja-arvo kohdassa -3 on -2 , ja raja-arvo kohdassa 0 on -1 .
 (Funktion lauseke on $\frac{x(x + 3)(x - 3)}{3x(x + 3)}$, joten lauseke supistuu muotoon $\frac{x - 3}{3}$. Siis

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{3} = \frac{-3 - 3}{3} = -2$$
 ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{3} = \frac{0 - 3}{3} = -1$$
.)
- $y = 31$, $y = -1$
 - $x = 0$, $x = 4$
 (Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 12x$ nollakohdat ovat 0 ja 4 . Vastaavat funktion f kuvaajan pisteet ovat $(0, 31)$ ja $(4, -1)$. Vaakasorat tangentit ovat näiden pisteiden kautta kulkevat x -akselin suuntaiset suorat ja pystysuorat normaalit pisteiden kautta kulkevat y -akselin suuntaiset suorat.)

3. 30 cm^3 (Jos rasian korkeus (raapaisupinta) on s senttimetriä ja rasian leveys t , niin rasian tilavuus on $V = 5st$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $3s + 2t = 12$, joten $V(s) = 5s(6 - \frac{3}{2}s)$, missä $0 \leq s \leq 4$.)

4. leveys 4,48 m, pituus 8,96 m, syvyys 2,99 m (Jos altaan leveys on s metriä ja korkeus t , niin altaan pituus on $2s$ ja laatoitettava ala $A = 2s^2 + 6st$. Muuttujien s ja t välillä on yhteys $2s^2t = 120$, joten $A(s) = 2s^2 + \frac{360}{s}$, missä $s > 0$.)

5. $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{3}x + 5$

(Paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Paraabelin tulee kulkea pisteen $(0, 5)$ kautta, joten $c = 5$. Lisäksi paraabelin tulee kulkea pisteen $(3, 4)$ kautta ja funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ derivaatan kohdassa 3 tulee olla 1. Näistä ehdoista saadaan yhtälöpari $9a + 3b + 5 = 4$ ja $6a + b = 1$.)

6. Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x - \frac{1}{2}$ arvo

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{ on negatiivinen ja arvo}$$

$$f(1) = a^2 + a + \frac{1}{2} \text{ on jokaisella } a\text{:n arvolla posi-}$$

tiivinen, sillä lausekkeella $a^2 + a + \frac{1}{2}$ ei ole nol-

lakohtia ja sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Siis funktiolla f on aina vähintään yksi nollakohta välillä $]0, 1[$. Tutkimalla derivaattafunktiota $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2$ (enintään yksi nollakohta ja kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli) nähdään, että funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Nollakohtia ei siis ole enempää kuin yksi.

Sarja E

1. 5 (Tangentin yhtälö on $y = -2x + 1$ ja normaalin yhtälö $y = \frac{1}{2}x - 4$.)

2. Käyrät leikkaavat pisteessä, jonka x -koordinaatti on 2. Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ derivaatta kohdassa 2

$$\text{on } -\frac{1}{4}. \text{ Funktiolle } g(x) = \frac{1}{34 - 16x} \text{ on}$$

$$g'(x) = \frac{16}{(34 - 16x)^2} \text{ ja } g'(2) = 4.$$

Koska $-\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$, leikkauspisteeseen piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

3. korkeus 0,71 m, leveys 1,41 m (Jos kourun leveys on s metriä, korkeus t ja pituus a , niin kourun seinien ja pohjan yhteenlaskettu pinta-ala on $A = a(s + 2t)$.

Muuttujien s ja t välillä on yhteys $st = 1$, joten

$$A(s) = a(s + \frac{2}{s}), \text{ missä } s > 0.$$

Koska a on positiivinen vakio, niin $A(s)$ on pienin, kun $f(s) = s + \frac{2}{s}$ on pienin.)

$$\begin{aligned} 4. \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}}{x - 1} \\ &= \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \right) : (x - 1) = \frac{1 - x^2}{2(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{(1 + x)(1 - x)}{2(x^2 + 1)(x - 1)} \\ &= -\frac{1 + x}{2(x^2 + 1)} \rightarrow -\frac{1}{2}, \text{ kun } x \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Funktion potenssin derivointikaavalla tai osamäärän derivointikaavalla saadaan

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \text{ johon sijoittamalla saadaan}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

5. Paraabelin pisteen $(a, a^2 + 1)$, missä $a \neq 0$, kautta kulkevan tangentin yhtälö on $y - a^2 - 1 = 2a(x - a)$. Tangentti leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -a^2 + 1)$. Janan keskipisteen y -koordinaatti on päätepisteiden y -koordinaattien $a^2 + 1$ ja $-a^2 + 1$ keskiarvo 1. Siis keskipiste on suoralla $y = 1$.
6. 2 : 1 (Olkoon lankun paksuus s ja leveys t . Tällöin lankun kantokyky on ks^2t , missä k on positiivinen verrannollisuuskerroin. Jos lankun ympärysmitta on $2a$, niin $s + t = a$, joten kantokyky muuttujan s funktiona on $f(s) = ks^2(a - s)$.)

Hakemisto

aidosti kasvava funktio		implisiittinen derivaatta	118
määritelmä	74		
tutkiminen derivaatan merkin avulla . .	75		
aidosti vähenevä funktio		jatkuvuus	
määritelmä	74	määritelmä	31
tutkiminen derivaatan merkin avulla . .	75	polynomifunktion jatkuvuus	31
		rationaalifunktion jatkuvuus	31
derivaatta		jatkuvan funktion kuvaaja	32
derivaatta tangentin kulmakertoimena	42	jatkuvan funktion nollakohdat	34
määritelmä	51		
vakioilla kerrotun funktion derivaatta .	54	kahdesti derivoituva funktio	98
summan derivaatta	54		
tulon derivaatta	113	kulkukaavio	76
osamäärän derivaatta	120	käyrien välinen kulma	71
derivaattafunktio	58	käyrän tangentti	41
derivoiminen	59	maksimiarvo	78
derivoituvuus		maksimikohta	78
kuvailu tangentin avulla	42	minimiarvo	78
määritelmä	51	minimikohta	78
erotusosamäärä	51	monotoninen funktio	
funktio	7	määritelmä	84
funktion itseisarvo	37	monotonisuus ja nollakohdat	84
funktion määrittelyjoukko		murtolauseke	
päättely lausekkeesta	8	määritelmä	8
sovellustilanteessa	9	supistaminen	10
funktion arvo	7	laskutoimitukset	15
funktion potenssin derivaatta		osamäärän derivaatta	120
eksponentti positiivinen kokonaisluku	115		
eksponentti kokonaisluku	123	polynomifunktio	
haarukoiminen	33	määritelmä	8
		määrittelyjoukko	8
		polynomifunktion derivoiminen	62

potenssifunktion derivaatta		suoran ja käyrän välinen kulma	71
eksponentti positiivinen kokonaisluku.	59	suurin ja pienin arvo	
eksponentti kokonaisluku.	123	potenssifunktion suurin ja pienin arvo	87
raja-arvo	22	määrittäminen kulkukaavion avulla . .	93
rationaaliepäyhtälön ratkaiseminen.	136	määrittäminen suljetulla välillä.	94
rationaalifunktio		terassikohta.	75
määritelmä	8	toisiaan sivuavat käyrät	71
määrittelyjoukko	9	tulon derivaatta	113
arvojen merkki	132	vakiofunktion derivaatta.	59
rationaaliyhtälön ratkaiseminen	130	ääriarvo	78
suljettu väli	93	ääriarvokohta	78
summan derivaatta.	54		